LA LÍNEA RECTA

CONTENIDO:

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Una ***línea recta***, lo mismo que cualquier curva contenida totalmente en un plano está representada, en relación con un sistema de ejes cartesianos, por una función de dos variables, siempre y cuando dicha función sea capaz de expresar la condición común que satisfacen absolutamente todos y cada uno de los puntos que constituyen dicha línea. Por ejemplo, si pensamos en una ***línea recta paralela*** al eje de las ***abscisas***, necesitamos empezar por saber dónde está trazada dicha ***paralela***, lo que en el caso de nuestra ***Figura 1*** equivale a conocer la distancia **b**. Además, es muy importante admitir que absolutamente todos los puntos de la ***paralela*** en cuestión, cualquiera que sea la ***abscisa***, tiene una ***ordenada*** constantemente igual a **b**, razón por lo que la función representativa de esta ***paralela*** tiene que ser **y=b** sin que tenga que intervenir la variable **x** porque para nada influye en el valor de **y**. Si la constante **b** es ***positiva*** la **paralela** está situada ***arriba*** del eje de las **x** y, si es ***negativa abajo***.

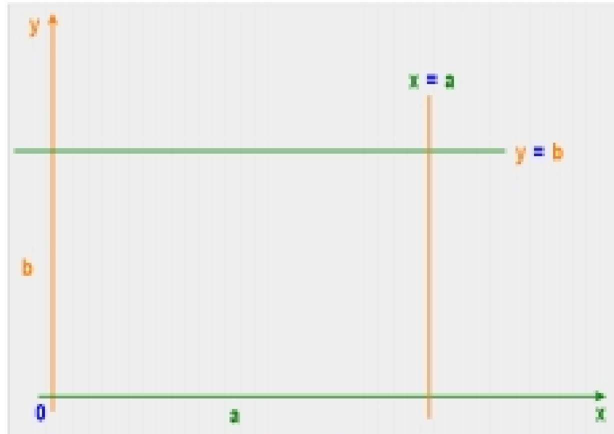

Figura 1

Como consecuencia inmediata se deduce que la función representativa del eje de las **x**, es **y=0**.

Resulta ahora evidente que la función que representa una ***paralela*** al eje de las ordenadas es **x=a**, dependiendo del signo de la constante **a** que la ***paralela*** esté situada a la ***derecha*** o a la ***izquierda*** del eje de ordenadas.

Por consiguiente, el propio eje de ***ordenadas*** está representada por la función: **x=0**.

1. Ecuación de la recta que pasa por el *origen* del sistema de coordenadas cartesianas.

Vamos ahora a demostrar que toda recta que pasa por el ***origen*** del sistema de coordenadas está representada por una función de la forma **y=*m*x** o sea una función de dos variables de primer grado, sin término independiente, en la que ***m*** es una constante cuyo significado estableceremos posteriormente. Para esto, necesitamos hacer ver que esta función establece o expresa la condición común a que se ajustan absolutamente todos los puntos que constituyen una recta que pasa por el ***origen***, en otras palabras debemos hacer constar que la ordenada **y** de todo punto de la recta efectivamente es igual al producto de la constante ***m*** por la abscisa **x** de dicho punto, es decir **y=*m*x**.

Empezaremos por hacer **x=0** en la función, resultando así **y=0**; de este modo se tiene un punto ***O(0,0)*** que coincide con el ***origen*** de las coordenadas. Enseguida damos a la variable **x** otro valor, por ejemplo **c**, resultando **y=*m*c**. De esta manera se tiene otro punto que es **Q(c,*m*c)**.

Ahora situamos estos puntos en el plano del sistema y los unimos por medio de una recta. A continuación tomamos sobre la recta un punto arbitrario ***P(x,y)***, desde el cual trazamos la perpendicular al eje de las **x**, paralelo al eje de las **y**; lo mismo hacemos en el punto ***Q*** para formar los triángulos rectángulos ***OPR'*** y ***OQR***. Ver la ***Figura 2***:

De los triángulos semejantes ***OQR*** y ***OPR'*** de la figura, se obtiene la siguiente proporción:

$$\frac{y}{x} = \frac{m\,c}{c}$$

Despejando a **y**:

$$y = \frac{m\,c\,x}{c}$$

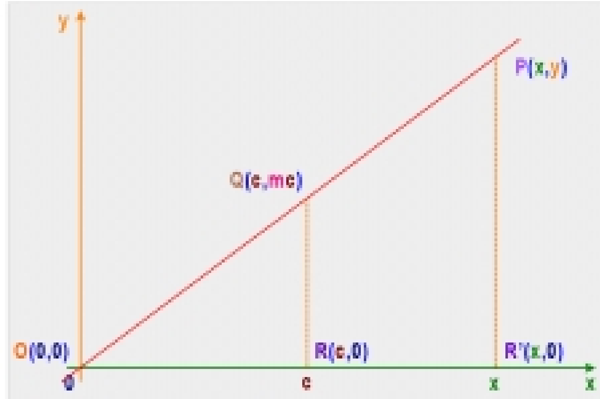

Figura 2

Simplificando, tenemos:

$$y = m\ x \quad \text{..} \textbf{(I)}$$

Que es la función representativa de toda ***línea recta que pasa por el origen*** del sistema de ejes coordenados.

Es evidente que esto mismo se cumple para cualquier otro punto que tomemos sobre la recta, puesto que volveríamos a formar triángulos semejantes.

1.1. Pendiente de una recta (significado de la constante *m*).

Con el propósito de ver el significado de la constante ***m*** y de acuerdo a la ***Figura 3***, haremos referencia a la recta **y=*m*x**, la cual supondremos que forma un ángulo **A** positivo, con respecto al sentido positivo del eje de las **x**. Sobre la recta tomamos un punto cualquiera ***P(x,y)***, desde el cual trazamos la perpendicular al eje de las **x**, y unimos el punto del ***origen*** con el punto cualquiera ***P***, para formar el triángulo rectángulo, obteniendo la siguiente función trigonométrica: $\tan\ A = \frac{y}{x}$; pero de la propia función dada $y = m\,x$, se deduce que $m = \frac{y}{x}$. Sustituyendo en la igualdad anterior, se tiene:

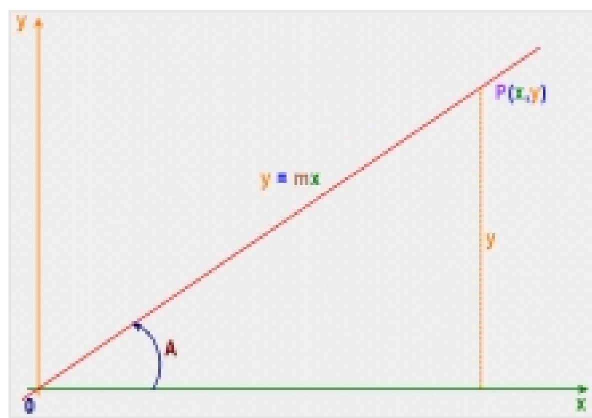

Figura 3

$$\tan\ A = m$$

Vemos pues que la constante ***m*** es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta que precisamente recibe el nombre de ***pendiente*** de la recta, puesto que controla la mayor o menor inclinación con respecto al eje de las **x**. Tomando en cuenta que la pendiente ***m*** depende de un ángulo y que es coeficiente de **x** en la función **y=*m*x**, también puede llamarse ***coeficiente angular*** de la ***recta***.

De este concepto establecemos la siguiente condición, *para que dos o más rectas sean **paralelas**, deben tener la misma **pendiente***, es decir:

$$m_1 = m_2 \quad \text{..} \textbf{(II)}$$

Cuando la constante ***m*** es ***positiva***, indica que el ángulo **A** de inclinación de la recta es ***agudo*** y, cuando es ***negativa***, que dicho ángulo mide más de $90°$, pero sin llegar a $180°$ ni sobrepasar este valor.

2. Ecuación de la recta que *no* pasa por el *origen*.

Se trata ahora de demostrar que una ***función de dos variables de primer grado con término independiente***, o sea una función de la forma:

$$y = m\ x + b$$

En la que ***b*** es otra constante, cuyo significado determinaremos más adelante, representa una ***línea recta***, que ***no*** pasa por el ***origen*** del sistema de coordenadas.

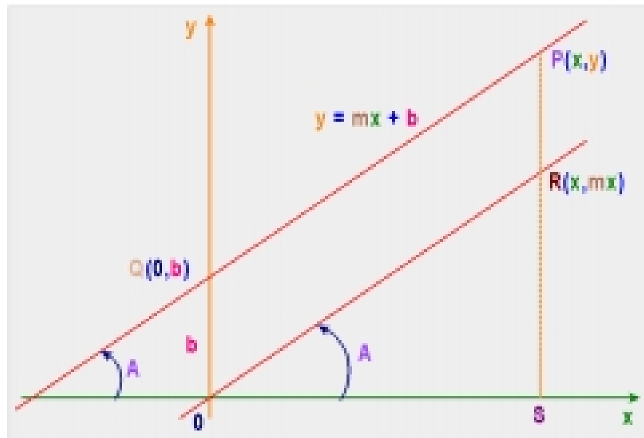

Figura 4

Para lograr este propósito haremos en dicha función **x=0**, resultando **y=b**. De este modo, se tiene el punto ***Q(0,b)*** que situamos en el plano del sistema de coordenadas y por él trazamos una paralela a la recta **y=*m*x** (Ver ***Figura 4***)

Precisamente haremos ver que la función **y=*m*x+b** representa una paralela que no pasa por el origen, para lo cual tomamos sobre ella un punto cualquiera ***P(x,y)***, y demostraremos que para ese punto, lo mismo que si se tratara de cualquier otro, se cumple la condición de que su ordenada **y** sea igual a la pendiente ***m*** por la abscisa **x** de ese punto más la constante **b**.

De la ***Figura 4*** deducimos:

$$\overline{SP} = \overline{SR} + \overline{RP}$$

Pero:

$$\overline{SP} = \mathbf{y}\ ;\quad \overline{SR} = \mathbf{m\ x} \quad \text{y} \quad \overline{RP} = \mathbf{b}$$

Por tanto, sustituyendo valores, encontramos:

$$y = m\ x + b \quad \text{..}\textbf{(III)}$$

Que es la ecuación de la ***línea recta que no pasa por el origen*** de ejes coordenados.

Podemos observar en nuestra ***Figura 4*** que la constante **b** representa la ***distancia*** que hay desde el ***origen*** hasta el ***punto de intersección*** de la recta con el eje de ordenadas **y**, constante que recibe el nombre particular de ***ordenada al origen***.

La ***Geometría Analítica*** conviene en llamar ***parámetros*** de una línea, recta o curva, a las ***constantes*** que intervienen en la función representativa correspondiente y de cuyos valores numéricos depende la posición que tenga dicha línea, esto independientemente del nombre y significado propios de cada ***constante***. Consecuentemente, los ***parámetros*** de la línea recta son la pendiente ***m*** y la ***ordenada*** al ***origen*** **b**, porque son estas dos ***constantes*** de las que depende la posición exacta de la recta.

Sabemos perfectamente que la expresión **y=*m*x+b** es una función de dos variables, pero se tolera llamarla ***ecuación de la recta***, porque desde el punto de vista gráfico su solución no es más que una línea recta.

Si tomamos en consideración que a partir de la ecuación común de la recta **y=mx+b**, y que las constantes ***m*** y **b** pueden ser fraccionarias, debemos admitir que para poderla escribir en la forma implícita:

$$\mathbf{A\,x + B\,y + C = 0} \quad \text{..........} \quad \textbf{(IV)}$$

tendríamos que empezar por quitar denominadores y luego ordenar todo en el primer miembro.

2.1. Ejercicios

1. **Escribir** la ecuación de la recta $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{2}$ en su forma ***implícita***.

SOLUCIÓN

Multiplicando por **6** ambos miembros de la ecuación:

$$6\,y = -4\,x - 15$$

Ordenando:

$$\mathbf{4\,x + 6\,y + 15 = 0}$$

Por tanto: **A = 4**, **B = 6** y **C = 15**

2. **Escribir** la ecuación de la recta **y = *8*x + 3** en su forma ***implícita***.

SOLUCIÓN

Ordenando los términos:

$$\mathbf{8\,x - y + 3 = 0}$$

Por tanto: **A = 8**, **B = -1** y **C = 3**

3. *Trazado* de una línea recta.

Para trazar una línea recta a partir de su ecuación, podemos utilizar uno cualesquiera de los tres ***métodos*** o ***procedimientos*** siguientes:

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

3.1 Primer método. Por tabulación.

Se cita este procedimiento porque se considera como ***método general***, puesto que permite trazar también cualquier curva. Consiste en dar valores arbitrarios pero ordenados a la variable **x** y en calcular los correspondientes de la función, con lo que se obtienen ***coordenadas*** de puntos que se sitúan en el plano del sistema de coordenadas y se unen en forma consecutiva, para obtener la gráfica correspondiente.

Ejemplo: Trazar la línea recta **y = 2x - 5**.

SOLUCIÓN

Dando valores a la **x** y sustituyendo en la ecuación de la recta dada, se determinan los valores correspondientes a **y**, como se muestra en la siguiente tabla:

x	y
-4	-13
-3	-11
-2	-9
-1	-7
1	-3
2	-1
3	1

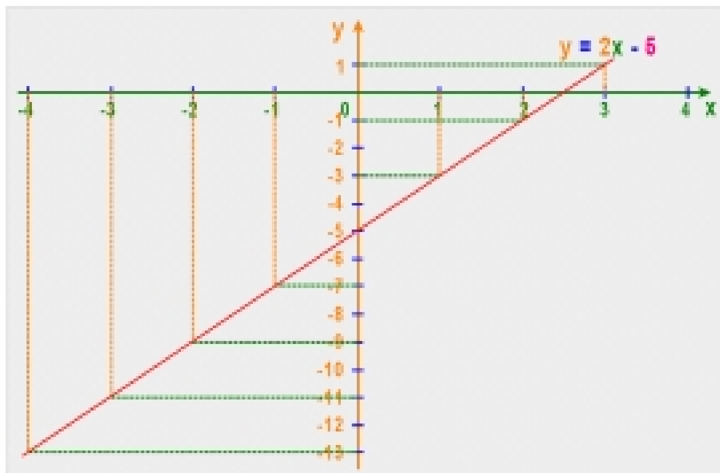

Figura 5

De acuerdo con lo anterior, la gráfica correspondiente a la ecuación **y = 2x - 5** se muestra en la ***Figura 5***:

3.2. Segundo método. Por la ordenada al origen y la pendiente.

Ya sabemos que la *ordenada al origen* ***b*** nos da el punto donde la recta corta al eje de las ordenadas, lo que equivale a conocer un punto por donde pasa la recta por trazar. La *pendiente* ***m*** puede interpretarse, sin necesidad de recurrir a las tablas matemáticas, recordando que la tangente trigonométrica de un ángulo es igual al cateto opuesto sobre el cateto adyacente. De acuerdo al significado de la constante ***m*** (del punto **1.1**)

Por lo que se recomienda:

1 **Graficar** el punto representado por el valor de la *ordenada al origen* **b**, el cual siempre estará sobre el eje de las ordenadas y dependiendo del signo, si éste es positivo arriba del origen del sistema de coordenadas y si es negativo abajo. De esta forma tenemos un primer punto por el cual pasará la línea recta.

2. Como se sabe $m = \frac{y}{x} = \tan\ \theta$; procedemos a partir del punto dado por la ordenada al origen **b**, representamos en magnitud el valor de **x** a la derecha o a la izquierda, lo cual depende del signo positivo o negativo que tenga, obteniendo así uno de los lados del triángulo rectángulo que se formará. Dicho lado es paralelo al eje de las **x**.

Enseguida se representa el valor de **y** partiendo del extremo final del segmento anterior hacia arriba o hacia abajo, lo que depende del signo positivo o negativo, para tener otro lado del triángulo rectángulo, que será paralelo al eje de las **y**.

3. Se unen el punto de la ordenada al origen y el extremo final del lado paralelo al eje de las **y**, para obtener la hipotenusa de dicho triángulo, que en realidad será la ***línea recta*** representada por la ecuación dada.

EJEMPLO 1. **Trazar** la ***línea recta*** cuya ***ecuación*** es: $\mathbf{y = 2x - 5}$

SOLUCIÓN

La ***ecuación*** común de la ***línea recta*** y la ecuación dada son:

$$y = m\,x + b$$
$$\uparrow \quad \uparrow$$
$$y = 2\;x\;-5$$

Igualando coeficientes, se tiene: ***m*=2** y **b=-5**, pero se sabe que:

$$\tan\theta = \mathbf{m} = 2 = \frac{4}{2} = \frac{y}{x}$$

Por tanto:

$$\mathbf{y = 4 \quad y \quad x = 2}$$

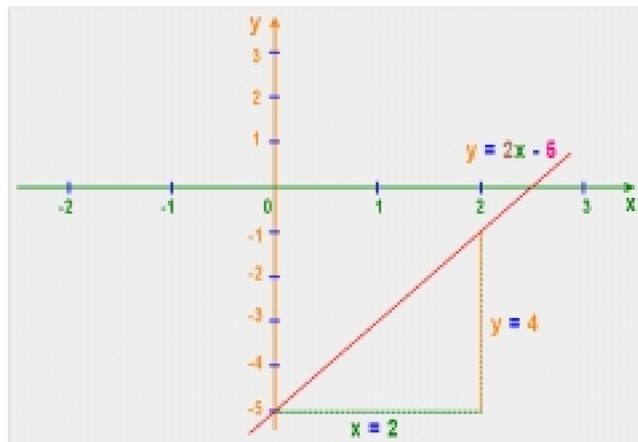

Figura 6

Se siguió el procedimiento dado en las recomendaciones anteriores. La gráfica de la recta, se muestra en la ***Figura 6***:

EJEMPLO 2. **Dibujar** la ***recta*** con ***ecuación*** $\mathbf{y = \frac{4}{5}\,x + 3}$:

SOLUCIÓN

De la ecuación dada se observa que **b = 3** y además:

$$\tan\;\theta = m = \frac{4}{5} = \frac{y}{x}$$

Por tanto:

$$\mathbf{y = 4 \quad y \quad x = 5}$$

Según las recomendaciones dadas, la gráfica de la ***línea***

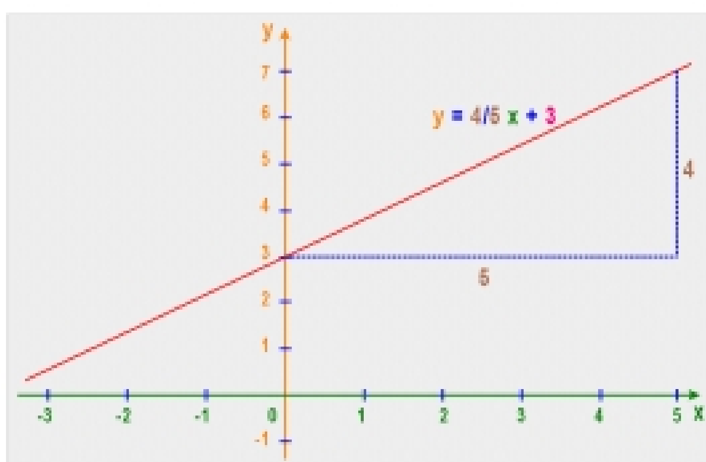

Figura 7

recta se muestra en la ***Figura 7****:*

EJEMPLO 3. **Realice** la gráfica de la ***línea recta***, cuya ***ecuación*** es: $\mathbf{y = -\frac{7}{3}x - \frac{2}{3}}$

SOLUCIÓN

De la ecuación, observamos que $b = -\frac{2}{3}$ y además:

$$\tan\theta = \mathbf{m = -\frac{7}{3} = \frac{y}{x}}$$

Por tanto:

$\mathbf{y = 7}$ y $\mathbf{x = -3}$

Basándose en las recomendaciones: La gráfica de la ***línea recta***, se muestra en la ***Figura 8****:*

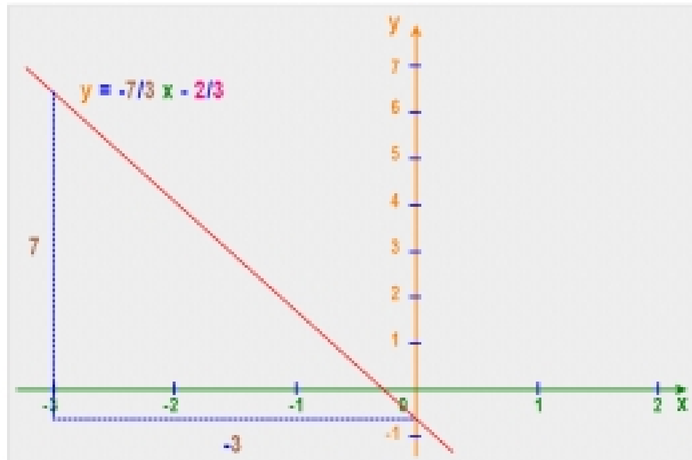

Figura 8

3.3. Tercer método: Por los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados.

Este procedimiento es muy conveniente cuando la ***ecuación*** de la recta es de la forma ***implícita***, fórmula **(IV)**. Si hacemos en ella **y=0**, determinaremos las ***coordenadas*** del punto donde la recta corta al eje de las **x**, y si hacemos **x=0** encontraremos también las ***coordenadas*** del punto de intersección de la recta con el eje de las ***ordenadas***, las cuales las llevamos al sistema de ejes y se unen por medio de una recta, la que gráficamente representa a la ***ecuación*** dada.

Ejemplo: Trazar la recta con ecuación: $\mathbf{3x + 5y - 15 = 0}$

SOLUCIÓN

Para **y=0**:

$$3x - 15 = 0$$

Despejando a **x**:

$$\mathbf{x} = \frac{15}{3} = \mathbf{5}$$

Por tanto, el punto de intersección con el eje de las ***abscisas*** es ***(5,0)***

Para **x=0**:

$$5y - 15 = 0$$

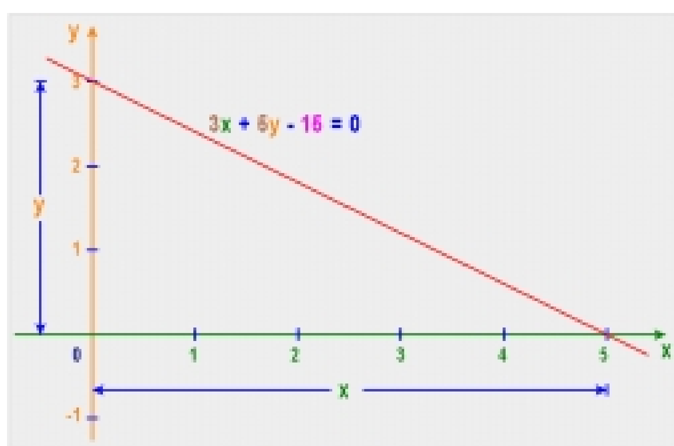

Figura 9

Despejando a **y**:

$$\mathbf{y} = \frac{15}{5} = \mathbf{3}$$

Por tanto, el punto de ***intersección*** con el eje de las ***ordenadas*** es ***(0,3)***

Por medio de la unión de los puntos de ***intersección*** con los ejes de coordenadas, se obtiene la gráfica mostrada en la ***Figura 9***:

4. *Intersección* de rectas.

Para determinar el punto de ***intersección*** de dos rectas, se hacen simultáneas sus ecuaciones, porque siendo el punto común para las dos, sus coordenadas del punto deben verificar simultáneamente a las dos ecuaciones.

EJEMPLO 1. **Determinar** el punto de ***intersección*** de las rectas dadas por las ecuaciones:

$$\mathbf{y = -4x + 8} \text{ .... } \mathbf{(1)}$$
$$\mathbf{y = 3x + 7} \text{ .... } \mathbf{(2)}$$

Igualando **(1)** y **(2)**:

$$3x + 7 = -4x + 8$$

Reduciendo términos semejantes:

$$7x = 1$$

Despejando a **x**, se obtiene:

$$\mathbf{x = \frac{1}{7}}$$

Sustituyendo el valor de **x** encontrado en la ecuación **(2)**:

$$\mathbf{y} = \frac{3}{7} + \frac{49}{7} = \mathbf{\frac{52}{7}}$$

Por tanto, el punto de ***intersección*** es:

$$\mathbf{I\left(\frac{1}{7}, \frac{52}{7}\right)}$$

EJEMPLO 2. Empleando el ***método de los determinantes***, **hallar** el ***punto de intersección*** de las rectas:

$$\mathbf{6x - 5y = -27} \text{ .... } \mathbf{(1)}$$
$$\mathbf{8x + 7y = 5} \text{ .... } \mathbf{(2)}$$

SOLUCIÓN

Resolviendo **(1)** y **(2)** para **x**, se tiene:

$$\mathbf{x} = \frac{\begin{vmatrix} -27 & -5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-189+25}{42+40} = -\frac{164}{82} = \mathbf{-2}$$

Para **y**, se tiene:

$$\mathbf{y} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -27 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}}{82} = \frac{30+216}{82} = \frac{246}{82} = \mathbf{3}$$

Por tanto, el punto de ***intersección*** de las ***rectas*** es:

$$\mathbf{I\ (-2, 3)}$$

4.1. Punto de *intersección* de tres rectas dadas.

Para que **tres** ***rectas*** dadas por las ***ecuaciones*** de la forma:

$$y = m_1 x + b_1$$
$$y = m_2 x + b_2$$
$$y = m_3 x + b_3$$

se ***corten*** en un ***mismo punto***, se debe verificar la siguiente ***condición***:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{m_1} & \mathbf{b_1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{m_2} & \mathbf{b_2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{m_3} & \mathbf{b_3} \end{vmatrix} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(V)}$$

EJEMPLO 1. **Demostrar** que las ***rectas*** dadas por las ***ecuaciones***:

$$\mathbf{y = 8x - 43}$$
$$\mathbf{y = -3x + 12}$$
$$\mathbf{y = -2x + 7}$$

Se cortan en un mismo punto.

SOLUCIÓN

Sustituyendo los datos según las ecuaciones dadas en el determinante anterior **(V)** y desarrollando, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -43 \\ 1 & -3 & 12 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 8 \\ 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -21 + 96 + 86 - 129 + 24 - 56 = -206 + 206 = \mathbf{0}$$

Ahora el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & m_1 & b_1 \\ 1 & m_2 & b_2 \\ 1 & m_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

También puede representarse de la siguiente forma, ya que:

$$\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \\ m_3 & b_3 \\ m_1 & b_1 \end{vmatrix} = m_1 b_2 + m_2 b_3 + m_3 b_1 - m_2 b_1 - m_3 b_2 - m_1 b_3 = 0$$

Es decir que:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{m_1} & \mathbf{b_1} \\ \mathbf{m_2} & \mathbf{b_2} \\ \mathbf{m_3} & \mathbf{b_3} \\ \mathbf{m_1} & \mathbf{b_1} \end{vmatrix} \mathbf{= 0} \quad \text{.......................} \quad \mathbf{(V')}$$

EJEMPLO 2. **Determinar** la pendiente de la recta, cuya ecuación es **$y=mx+5$**, para que pase por el punto de ***intersección*** de las rectas, representadas por las ecuaciones **$y = -3x - 5$**, **$y = 4x + 2$**.

SOLUCIÓN

Aplicando el determinante de la fórmula **(V')**, se tiene:

$$\begin{vmatrix} m & 5 \\ -3 & -5 \\ 4 & 2 \\ m & 5 \end{vmatrix} = -5m - 6 + 20 + 15 + 20 - 2m = 0$$

Reduciendo:

$$-7m = -49$$

Por tanto, el valor buscado de ***m*** es: $\mathbf{m = \frac{-49}{-7} = 7}$

5. *Ángulo* entre dos rectas.

Con el apoyo de la ***Figura 10***, se trata de encontrar una fórmula por medio de la cual podamos calcular el ***ángulo*** que forman entre sí dos rectas ***concurrentes***, representadas por sus respectivas ecuaciones.

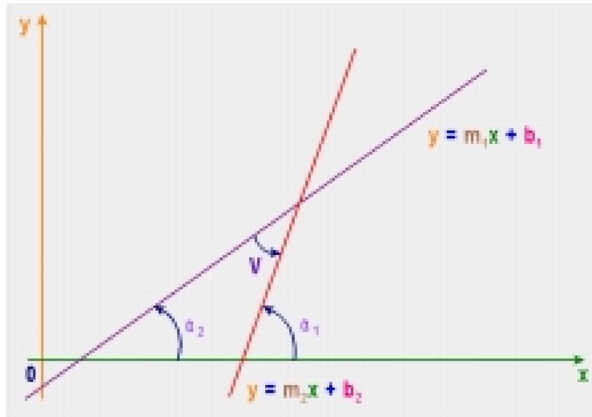

Figura 10

Se sabe que en todo triángulo, un ***ángulo*** exterior es igual a la suma de los ***ángulos*** internos que no le son adyacentes.

De acuerdo a lo anterior y basándose en la ***Figura 10***:

$$V + \alpha_1 = \alpha_2$$

Despejando a **V**:

$$V = \alpha_2 - \alpha_1$$

Tomando la ***tangente*** en ambos miembros de la ecuación:

$$\tan V = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Aplicando la ***tangente*** de la diferencia de ***ángulos***:

$$\tan V = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}$$

Como:

$$\tan\alpha_1 = m_1$$
$$\tan\alpha_2 = m_2$$

Sustituyendo:

$$\mathbf{\tan V = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}} \quad \text{..........} \quad \mathbf{(VI)}$$

Esta fórmula puede aplicarse tal como se presenta.

Para el caso en el cual las dos rectas ***concurrentes*** formen entre sí dos ***ángulos*** suplementarios, uno ***agudo*** y otro ***obtuso***, cuyas ***tangentes*** trigonométricas son iguales y de signo contrario, la fórmula anterior se aplica en la siguiente forma:

$$\tan V = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \qquad \text{(VI')}$$

5.1. Condición de *perpendicularidad* de dos rectas.

Cuando dos rectas se cortan ***perpendicularmente***, es evidente que el ***ángulo*** que forman es $V = 90°$, por tanto:

$$\tan V = \tan 90° = \infty$$

Y de acuerdo con la fórmula **(VI)** anterior, tendremos:

$$\infty = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Rearreglando la ecuación:

$$1 + m_1 m_2 = \frac{m_2 - m_1}{\infty} = 0$$

$$1 + m_1 m_2 = 0$$

Despejando a m_1:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \qquad \text{(VII)}$$

Según esto, para que dos rectas sean ***perpendiculares***, deben tener ***pendientes recíprocas y de signos contrarios***, como es el caso de las siguientes rectas:

$$y = \frac{2}{5}x + 6$$

$$y = -\frac{5}{2}x - 8$$

5.2. Ejercicios

1. Las ***pendientes*** de los lados de un triángulo miden $\frac{1}{2}$, 1 y 2. **Demostrar** que el triángulo es ***isósceles***.

SOLUCIÓN

Se sabe que un triángulo de este tipo, es el que tiene ***dos lados iguales*** y uno ***desigual***.

Sean:

$$m_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad m_2 = 1 \quad ; \quad m_3 = 2$$

Sea **A** el ángulo que forman los lados de pendientes m_1 y m_2, su ***tangente*** está dada por:

$$\tan A = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \bullet 1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Tomando la ***tangente*** del ángulo **B**, formado por los lados de pendientes m_1 y m_3, se tiene:

$$\tan B = \frac{m_3 - m_1}{1 + m_1 m_3} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \bullet 2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

Finalmente, la ***tangente*** del ángulo **C**, cuyos lados tienen pendientes m_2 y m_3, está dada por:

$$\tan C = \frac{m_3 - m_2}{1 + m_2 m_3} = \frac{2 - 1}{1 + 1 \bullet 2} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

Como:

$$\tan A = \tan C$$

Resulta claro que **A = C** y por tanto, el ***triángulo es isósceles***.

2. **Demostrar** que a partir de la ecuación $(y + 8)^2 = x^2$, se obtienen dos rectas ***perpendiculares***.

SOLUCIÓN

Como la ecuación de toda recta debe ser fundamentalmente de primer grado, extraemos raíz cuadrada a los dos miembros de la ecuación propuesta:

$$\sqrt{(y + 8)^2} = \pm \sqrt{x^2}$$

$$y + 8 = \pm\, x$$

De la expresión anterior, se obtienen las ecuaciones de las rectas pedidas:

$$y + 8 = x$$

$$y + 8 = -x$$

Despejando a **y** de cada una de las ecuaciones anteriores:

$$y = x - 8$$
$$y = -x - 8$$

Las rectas resultantes son ***perpendiculares***, porque sus ***pendientes*** **1** y **-1**, son ***recíprocas*** y de ***signos contrarios***.

3. La ***ordenada*** al origen de una recta es **7**. **Determine** su ***ecuación*** sabiendo que debe ser ***perpendicular*** a la recta $4x + 9y - 27 = 0$.

SOLUCIÓN

La ***ecuación*** por determinar debe tener la forma **y=mx+7**, en la inteligencia de que ***m*** debe ser ***recíproca*** y de ***signo contrario*** con relación a la ***pendiente*** de la recta dada, razón por la cual despejamos a **y** de la ecuación conocida:

$$9y = -4x + 27$$
$$y = -\frac{4}{9}x + 3$$

Aplicando la condición de ***perpendicularidad*** de dos líneas rectas, según la fórmula **(VII)** y de la ecuación anterior se tendrá que $m = \frac{9}{4}$, entonces la ***ecuación*** de la ***línea recta*** pedida es:

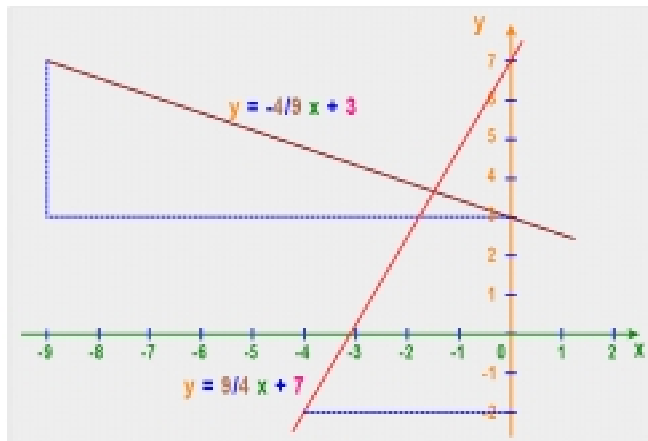

Figura 11

$$y = \frac{9}{4}x + 7$$

La gráfica correspondiente se presenta en la ***Figura 11***.

6. Ecuación de la recta que pasa por un *punto dado*.

Por lo que sabemos, nos consta que cualquier recta tiene una ecuación de la forma $y = mx + b$, la que solamente estará bien definida cuando conozcamos los parámetros ***m*** y **b**. Con tendencia a calcular cuando menos uno de estos parámetros, tomaremos en consideración que si hay una infinidad de rectas que pasan por el punto conocido ***P(x₁, y₁)***, las ***coordenadas*** de éste deben verificar la ecuación de cualesquiera de ellas, en cuyo caso se tiene:

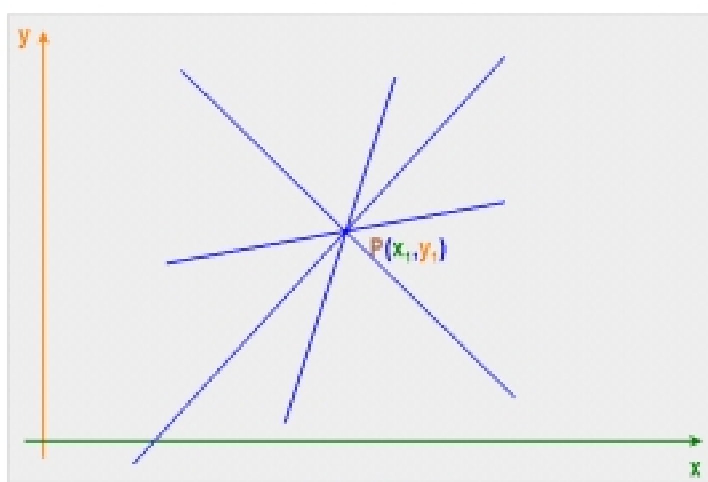

Figura 12

$$y_1 = m\,x_1 + b$$

Despejando a **b**:

$$\mathbf{b = y_1 - m\,x_1}$$

Este es, el valor que justamente debe tener **b** para que la ecuación $\mathbf{y = m\,x + b}$ represente, no cualquier recta, sino únicamente las que pasan por el punto ***P(x₁, y₁)*** conocido, como se muestra en la ***Figura 12***.

Por consiguiente, si sustituimos el valor de **b** en la ecuación ya mencionada, obtendremos:

$$y = m\,x + b = m\,x + y_1 - m\,x_1$$

Ordenando y factorizando, se tiene:

$$\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)} \quad \text{..........} \quad \mathbf{(VIII)}$$

Que es la ***ecuación general*** de todas las rectas que pasan por un punto ***P*** conocido, una diferente para cada valor distinto de la pendiente ***m***.

6.1. Ejercicios

1. **Determine** la ***ecuación*** de la recta que pasa por el punto ***P(-3, -5)*** y es ***paralela*** a la recta $\mathbf{y = -\frac{2}{3}x + 9}$.

SOLUCIÓN

La ***ecuación*** por determinar debe tener la forma:

$$\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

En la que, según datos:

$$\mathbf{x_1 = -3 \quad ; \quad y_1 = -5 \quad ; \quad m = -\frac{2}{3}}$$

Por tratarse de rectas ***paralelas*** y de acuerdo a la condición de paralelismo, las ***pendientes*** son iguales, es decir: $\mathbf{m_1 = m_2}$.

Sustituyendo, la ***ecuación*** pedida es:

$$y + 5 = -\frac{2}{3}\,(x + 3)$$

$$y + 5 = -\frac{2}{3}x - 2$$

Finalmente, despejando a **y**:

$$\mathbf{y = -\frac{2}{3}\,x - 7}$$

2. **Determinar** la ***ecuación*** de la recta que pasa por el punto de ***intersección*** de las rectas: $\mathbf{5\,x - 3\,y = -2}$ y $\mathbf{8\,x + 7\,y = 44}$ y es ***perpendicular*** a la recta que está definida por la ecuación: $\mathbf{y = \frac{2}{3}\,x + 1}$

SOLUCIÓN

La ***ecuación*** que se trata de obtener debe ser de la forma dada por la fórmula **(VIII)**, en la inteligencia de que $\mathbf{m = -\frac{3}{2}}$, por condición de ***perpendicularidad***, en tanto que $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{y_1}$ son las coordenadas del punto por donde debe pasar dicha recta, el cual está definido por la ***intersección*** de las dos rectas dadas, por consiguiente, tales coordenadas se calculan haciendo simultáneas las ecuaciones de esas dos rectas conocidas.

Resolviendo por determinantes, se obtiene:

$$\mathbf{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 44 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-14 + 132}{35 + 24} = \frac{118}{59} = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{y_1} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 44 \end{vmatrix}}{59} = \frac{220 + 16}{59} = \frac{236}{59} = \mathbf{4}$$

Por tanto, el punto **I** de ***intersección*** es:

$$\mathbf{I(2,4)}$$

Sustituyendo $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$ y ***m*** en la ecuación dada por la fórmula **(VIII)**, se obtiene la ecuación solicitada:

$$y - 4 = -\frac{3}{2}\,(x - 2) = -\frac{3}{2}\,x + 3$$

Finalmente, despejando a **y**:

$$\mathbf{y = -\frac{3}{2}\,x + 7}$$

3. **Encontrar** la ***ecuación*** de la recta que pasa por el punto ***P(4,10)*** y forma un ángulo de **45°** con la recta $\mathbf{y = \frac{3}{2}\,x}$.

SOLUCIÓN

La ***ecuación*** por determinar debe tener la forma dada por la fórmula **(VIII)** Sustituyendo los datos conocidos, se tiene:

$y - 10 = m\ (x - 4)$ ....**(1)**

De esta ecuación, nos falta conocer la pendiente ***m***, la cual podemos obtener utilizando la fórmula del ***ángulo entre dos rectas concurrentes***, o sea:

$$\tan V = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1\ m_2}$$

Si consideramos que:

$$\tan V = \tan 45° = 1$$

$$m_1 = \frac{3}{2}$$

$$m_2 = m = ?$$

Sustituyendo valores:

$$1 = \frac{m - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3m}{2}} = \frac{\frac{2m - 3}{2}}{\frac{2 + 3m}{2}} = \frac{2m - 3}{2 + 3m}$$

Quitando denominadores:

$$2 + 3m = 2m - 3$$

Despejando a ***m***:

$$\mathbf{m = -5}$$

Es decir, la ecuación pedida se obtiene sustituyendo el valor de ***m*** en la ecuación **(1)**:

$$y - 10 = -5\ (x - 4) = -5x + 20$$

Finalmente, despejando a **y**:

$$\mathbf{y = -5x + 30}$$

Pero también puede tenerse la situación en la cual:

$$\tan V = \mathbf{\tan 45° = 1}$$

$m_1 = m = ?$ (en este caso es desconocida)

$$m_2 = \frac{3}{2}$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Entonces:

$$1=\frac{\frac{3}{2}-m}{1+\frac{3m}{2}}=\frac{\frac{3-2m}{2}}{\frac{2+3m}{2}}=\frac{3-2m}{2+3m}$$

Quitando denominadores:

$$2+3m=3-2m$$

Despejando a ***m***:

$$\mathbf{m=\frac{1}{5}}$$

Consecuentemente, obtendremos la otra solución, sustituyendo el nuevo valor de ***m*** en la ecuación **(1)**:

$$y-10=\frac{1}{5}\,(x-4)=\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}$$

Finalmente, despejando a **y**:

$$\mathbf{y=\frac{1}{5}x+\frac{46}{5}}$$

Que también cumple con lo establecido. La ***Figura 13*** muestra gráficamente los resultados obtenidos.

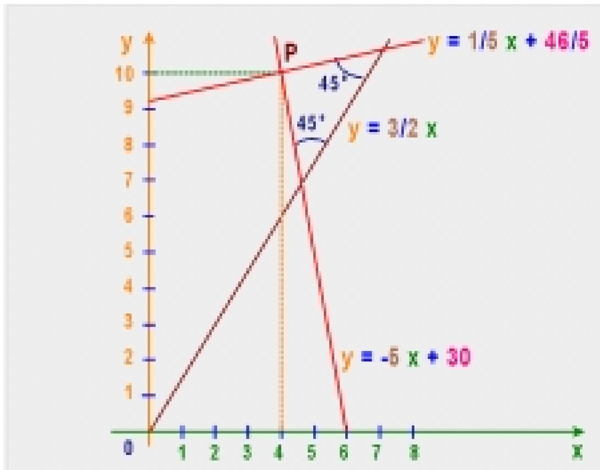

Figura 13

7 Ecuación de la recta que pasa por *dos puntos dados*.

Ya hemos visto que cualquier recta que pasa por ***P***, debe tener una ecuación de la forma:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Como por el punto ***P*** pasan una ***infinidad de rectas***, la ecuación que se acaba de expresar, representará la que también pasa por el punto ***Q***, solamente si se cumple la siguiente condición (de acuerdo a la ***Figura 14***):

$$m=\tan\alpha=\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}}=\frac{\overline{NQ}-\overline{NR}}{\overline{PR}}$$

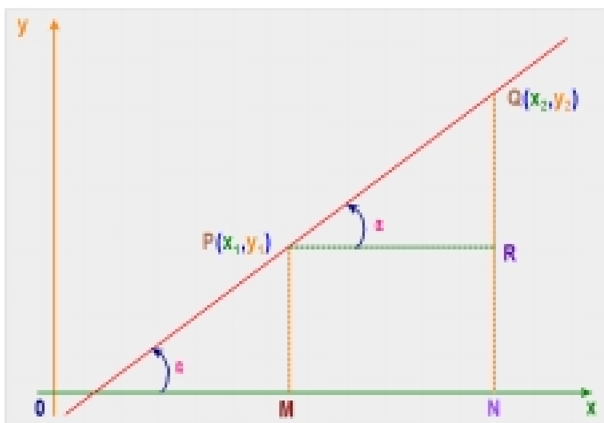

Figura 14

Pero:

$$\overline{NR} = \overline{MP}$$
$$\overline{PR} = \overline{MN}$$

Y

$$\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM}$$

Por lo que:

$$m = \frac{\overline{NQ} - \overline{MP}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{NQ} - \overline{MP}}{\overline{0N} - \overline{0M}}$$

También se ve que:

$$\overline{NQ} = y_2$$
$$\overline{MP} = y_1$$
$$\overline{0N} = x_2$$
$$\overline{0M} = x_1$$

Sustituyendo en ***m***:

$$\mathbf{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Que es la ***pendiente*** de la recta que pasa por ***dos puntos dados***.

Al sustituir este valor en la ecuación original, fórmula **(VIII)**, obtenemos:

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \quad \text{...} \quad \mathbf{(IX)}$$

Que nos representará a la ecuación de todas las rectas que pasan por ***dos puntos conocidos***.

Esta misma ecuación se puede representar en el ***determinante*** siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{...} \quad \mathbf{(IX')}$$

8 Ejercicios

1. **Determinar** la ***ecuación de la recta*** que pasa por los puntos ***P(-3,5)*** y ***Q(7,-3)***.

SOLUCIÓN

La ***ecuación*** debe tener la forma dada por la fórmula **(IX)**, en la que sustituyendo las coordenadas de los puntos dados, se obtiene:

$$y-5=\frac{-3-5}{7+3}(x+3)=-\frac{8}{10}(x+3)=-\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}$$

Despejando a **y**, se obtiene la ecuación buscada:

$$\mathbf{y=-\frac{4}{5}x+\frac{13}{5}}$$

Ahora, por el determinante de la fórmula **(IX')**, tendremos:

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & -3 \\ x & y \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 9+7y+5x-35+3x+3y = 0$$

Reduciendo términos semejantes y ordenando:

$$10y=-8x+26$$
$$5y=-4x+13$$

Despejando a **y**:

$$\mathbf{y=-\frac{4}{5}x+\frac{13}{5}}$$

Se observa que se obtiene la **misma** ***ecuación de la recta***.

2. Los ***vértices*** de un triángulo son: ***A(-2,2)***, ***B(2,6)*** y ***C(6,-4)***:

a) **Demostrar** que la recta que une los ***puntos medios*** de dos de sus lados es ***paralela*** al tercero.

b) **Demostrar** que sus tres ***medianas*** se cortan en el mismo punto.

c) **Demostrar** que el punto de ***intersección*** de las ***medianas***, llamado **centroide** del triángulo, está situado a las ***dos terceras partes*** de la magnitud total de cada ***mediana***, a partir del ***vértice*** correspondiente.

d) **Demostrar** que las tres ***alturas*** se cortan en el mismo punto.

e) **Demostrar** que las tres ***mediatrices*** son ***concurrentes***.

SOLUCIÓN

Llevando los datos a la gráfica de la ***Figura 15***:

a) Las coordenadas del ***punto medio*** del lado ***AB*** están dadas por:

$$x_{M_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$$

$$y_{M_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

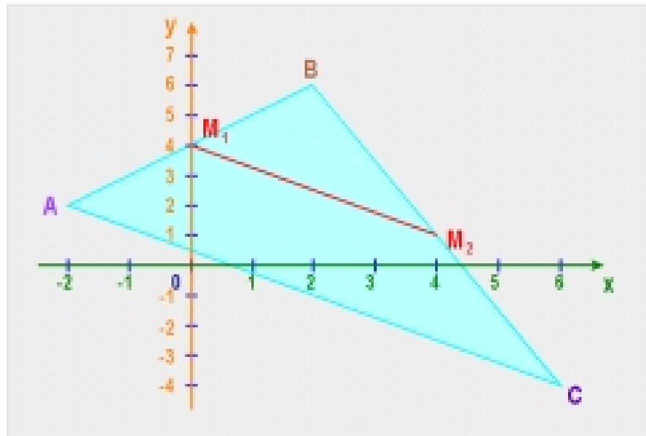

Figura 15

Por tanto, las coordenadas del ***punto medio*** del lado ***AB*** son:

$$\mathbf{M_1(0,4)}$$

Las coordenadas del ***punto medio*** del lado ***BC*** están dadas por:

$$x_{M_2} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$y_{M_2} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{6-4}{2} = 1$$

Por tanto, las coordenadas del ***punto medio*** del lado ***BC*** son:

$$\mathbf{M_2(4,1)}$$

Para que las rectas $\overline{M_1M_2}$ y $\overline{AC}$ sean ***paralelas***, debieren tener la misma ***pendiente***, lo cual necesitamos comprobar. Así tenemos que:

Pendiente de $\overline{M_1M_2} = \frac{4-1}{0-4} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

Pendiente de $\overline{AC} = \frac{2+4}{-2-6} = \frac{6}{-8} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

Puesto que ambas ***pendientes*** son iguales, las rectas son ***paralelas***.

b) En el inciso anterior, se determinaron las coordenadas de los ***puntos medios*** de los lados ***AB*** y ***BC***, dados por M_1 y M_2, respectivamente. Las coordenadas del ***punto medio*** del lado ***AC*** están dadas por:

$$\mathbf{x_{M_3}} = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+6}{2} = \mathbf{2}$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

$$y_{M_3} = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2-4}{2} = -1$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio del lado ***AC*** son:

$$M_3(2,-1)$$

Para demostrar que las tres ***medianas*** se cortan en el mismo punto, primero se deben encontrar sus ecuaciones, para después hacer simultáneas dos de ellas y sustituir los valores encontrados en la tercera ecuación para comprobar que se verifican. Para esto, tendremos que la ecuación de cada ***mediana*** corresponde a la fórmula **(IX)**

De acuerdo a la definición de la ***mediana***, sustituimos los valores de las coordenadas de los puntos ***C*** y ***M_1*** en la fórmula **(IX)**, para obtener la ecuación de la ***mediana*** $\overline{CM_1}$:

$$y+4 = \frac{4+4}{0-6}(x-6) = -\frac{4}{3}x+8$$

Despejando a **y**:

$$y = -\frac{4}{3}x+4 \qquad \textbf{(1)}$$

Para la ecuación de la mediana $\overline{AM_2}$, sustituimos los valores de las coordenadas de los puntos ***A*** y ***M_2*** en la fórmula **(IX)**:

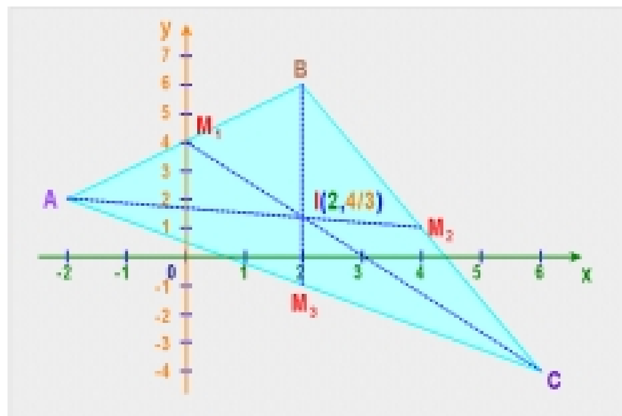

Figura 16

$$y-2 = \frac{1-2}{4+2}(x+2) = -\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$$

Despejando a **y**:

$$y = -\frac{1}{6}x+\frac{5}{3} \quad \dots\dots\dots\dots \textbf{(2)}$$

En el caso particular de la mediana $\overline{BM_3}$, según la ***Figura 16***, observamos que los puntos por la que ésta pasa tienen la misma ***abscisa***, por lo que esta recta es ***paralela*** al eje de ***ordenadas*** y su ecuación es simplemente:

$$x = 2 \quad \dots\dots\dots\dots \textbf{(3)}$$

Para comprobar la ecuación anterior, se sustituyen las coordenadas de los puntos ***B*** y ***M_3*** en la fórmula **(IX)**, multiplicando previamente ambos miembros de la ecuación por **x_2-x_1** para evitar dividir entre **cero**:

$$(2-2)(y-6) = (-1-6)(x-2) = -7(x-2) = -7x+14$$
$$0(y-6) = -7x+14$$
$$0 = -7x+14$$

Despejando a **x**:

$$\mathbf{x=2}$$

Con lo cual queda comprobado.

Enseguida, haciendo simultáneas las ecuaciones **(2)** y **(3)**, para lo cual sustituimos **(3)** en **(2)**:

$$\mathbf{y} = -\frac{1}{6}(2) + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

De lo anterior, concluimos que el punto de ***intersección*** de las ***medianas*** $\overline{AM_2}$ y $\overline{BM_3}$, representadas por las ecuaciones **(2)** y **(3)** es:

$$\mathbf{I\left(2, \frac{4}{3}\right)}$$

Sustituyendo las coordenadas del punto **I** en la ecuación **(1)**, se obtiene:

$$\mathbf{\frac{4}{3}} = -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} \equiv \mathbf{\frac{4}{3}}$$

Con lo que queda demostrado que las ***medianas*** del triángulo se ***cortan*** en el mismo punto.

c) Aplicando la fórmula de la ***distancia*** entre dos puntos, vista en el **Capítulo 1**, las ***distancias*** de ***C*** a ***I*** y de ***C*** a ***M₁***, son:

$$\overline{CI} = \sqrt{(6-2)^2 + \left(-4-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(-\frac{16}{3}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{256}{9}} = \sqrt{\frac{144}{9} + \frac{256}{9}} = \sqrt{\frac{400}{9}} = \mathbf{\frac{20}{3}}$$

$$\overline{CM_1} = \sqrt{(6-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$$

De los resultados, se ve claro que $\mathbf{\overline{CI} = \frac{2}{3}\,\overline{CM_1}}$.

De la misma forma, las ***distancias*** de ***A*** a ***I*** y de ***A*** a ***M₂***, son:

$$\overline{AI} = \sqrt{(-2-2)^2 + \left(2-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{144}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{148}{9}} = \mathbf{\frac{2}{3}\sqrt{37}}$$

$$\overline{AM_2} = \sqrt{(-2-4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{\mathbf{37}}$$

Por tanto: $\mathbf{\overline{AI} = \frac{2}{3}\,\overline{AM_2}}$

Las ***distancias*** de ***B*** a ***I*** y de ***B*** a ***M₃***, están dadas por:

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

$$\overline{BI} = \sqrt{(2-2)^2 + \left(6 - \frac{4}{3}\right)^2} = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}} \quad \mathbf{(7)}$$

$$\overline{BM_3} = \sqrt{(2-2)^2 + (6+1)^2} = \mathbf{7}$$

Por tanto: $\overline{\mathbf{BI}} = \mathbf{\frac{2}{3}}\ \overline{\mathbf{BM_3}}$

Con lo que queda comprobado que el ***centroide*** del triángulo está situado a las ***dos terceras partes*** de la longitud de cada ***mediana***, a partir del ***vértice*** correspondiente.

La ***Figura*** del inciso ***b)***, muestra los resultados obtenidos.

d) Cada ***altura*** debe tener una ecuación igual a la fórmula **(VIII)**, porque pasa por un ***punto conocido*** y su ***pendiente*** debe ser ***recíproca*** y de ***signo contrario*** con relación a la del lado respectivo. Las ***pendientes*** de cada lado del triángulo, están dadas por:

Pendiente del lado $\overline{AB} = \frac{2-6}{-2-2} = \frac{-4}{-4} = \mathbf{1}$

Pendiente del lado $\overline{BC} = \frac{6+4}{2-6} = \frac{10}{-4} = \mathbf{-\frac{5}{2}}$

Pendiente del lado $\overline{AC} = \frac{2+4}{-2-6} = \frac{6}{-8} = \mathbf{-\frac{3}{4}}$

Sustituyendo las ***pendientes*** correspondientes en la ecuación de la recta que pasa por un ***punto dado***, fórmula **(VIII)**, tenemos que la ecuación relativa a la ***altura*** del lado $\overline{\mathbf{AB}}$ es:

$$y + 4 = -1\,(x - 6) = -x + 6$$

Despejando a **y**:

$\mathbf{y = -x + 2}$ ....**(1)**

La ecuación de la ***altura*** relativa al lado $\overline{\mathbf{BC}}$ es:

$$y - 2 = \frac{2}{5}\,(x + 2) = \frac{2}{5}\,x + \frac{4}{5}$$

Despejando a **y**:

$\mathbf{y = \frac{2}{5}\,x + \frac{14}{5}}$ ....**(2)**

La ecuación de la ***altura*** relativa al lado $\overline{\mathbf{AC}}$ es:

$$y - 6 = \frac{4}{3}\,(x - 2) = \frac{4}{3}\,x - \frac{8}{3}$$

Despejando a **y**:

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \qquad (3)$$

De las ecuaciones **(1)**, **(2)** y **(3)**, se tiene:

$$m_1 = -1\ ,\ b_1 = 2$$
$$m_2 = \frac{2}{5}\ ,\ b_2 = \frac{14}{5}$$
$$m_3 = \frac{4}{3}\ ,\ b_3 = \frac{10}{3}$$

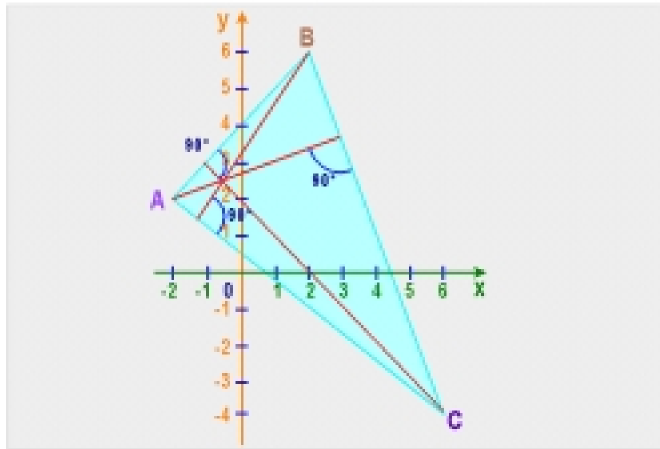

Figura 17

Sustituyendo los valores anteriores en la fórmula **(V')**, condición para que tres rectas sean ***concurrentes***, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ \frac{2}{5} & \frac{14}{5} \\ \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{14}{5} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{3} - \frac{56}{15} + \frac{10}{3} = \frac{-42 + 20 + 40 - 12 - 56 + 50}{15} =$$

$$= \frac{110 - 110}{15} = \mathbf{0}$$

Por tanto, las ***tres alturas se cortan en el mismo punto***.

La ***Figura 17***, muestra los resultados obtenidos.

e) Las ***mediatrices*** son ***perpendiculares*** a los lados de un triángulo y pasan por sus puntos medios. Como ya conocemos las ***pendientes*** de los lados, aplicando la condición de ***perpendicularidad***, entonces las ***pendientes*** de las ***mediatrices*** serán ***recíprocas*** y de ***signo contrario***. Por tanto, usando la fórmula **(VIII)**, la ecuación de la ***mediatriz*** del lado $\overline{AB}$ es:

$$y - 4 = -(x - 0) = -x$$

Despejando a **y**:

$$\mathbf{y = -x + 4} \quad \text{...}(1)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, para la ***mediatriz*** del lado $\overline{BC}$ se tiene:

$$y-1=\frac{2}{5}(x-4)=\frac{2}{5}x-\frac{8}{5}$$

Despejando a **y**:

$$\boldsymbol{y=\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(2)}$$

Para la ***mediatriz*** del lado $\overline{AC}$, se obtiene:

$$y+1=\frac{4}{3}(x-2)=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$$

Despejando a **y**:

$$\boldsymbol{y=\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}} \qquad \textbf{(3)}$$

De las ecuaciones **(1)**, **(2)** y **(3)** se tiene:

$$\boldsymbol{m_1=-1\ ,\ b_1=4}$$
$$\boldsymbol{m_2=\frac{2}{5}\ ,\ b_2=-\frac{3}{5}}$$
$$\boldsymbol{m_3=\frac{4}{3}\ ,\ b_3=-\frac{11}{3}}$$

Aplicando la fórmula **(V')**, condición de ***concurrencia*** de tres rectas, se tiene:

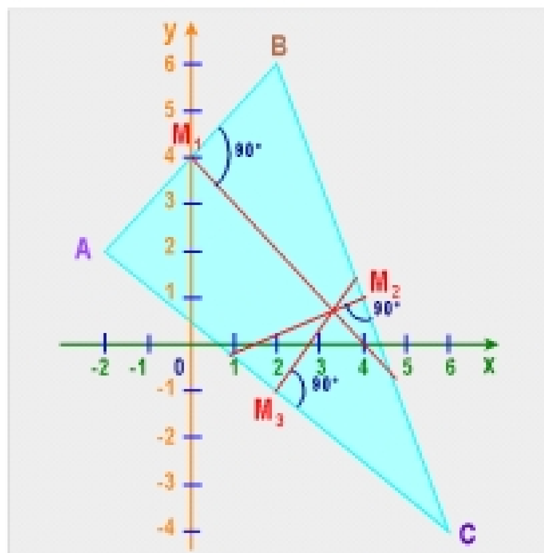

Figura 18

$$\left|\begin{array}{cc} -1 & 4 \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{3} & -\frac{11}{3} \\ -1 & 4 \end{array}\right| = \frac{3}{5}-\frac{22}{15}+\frac{16}{3}-\frac{8}{5}-\frac{12}{15}-\frac{11}{3}=\frac{9-22+80-24+12-55}{15}=$$

$$=\frac{101-101}{15}=\mathbf{0}$$

Por tanto, las ***mediatrices son concurrentes***, como se puede ver en la ***Figura 18***.

3. Un punto dista ***siete** unidades* del origen del sistema de coordenadas y la ***pendiente*** de la recta que lo une al punto ***A(3,4)*** es **1/2**. **Determinar** las ***coordenadas*** del punto.

SOLUCIÓN

Sea ***P(x,y)*** el punto por determinar. De acuerdo con el enunciado, su ***distancia*** el origen está dada por:

$$\overline{PO} = \sqrt{x^2 + y^2} = 7$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 49} \quad \text{.......................................}(1)$$

Como la ***pendiente*** de la recta que une los puntos ***P*** y ***A***, debe ser igual a **1/2**, entonces:

Pendiente de $\overline{PA} = \frac{y-4}{x-3} = \frac{1}{2}$

Quitando denominadores y simplificando:

$$2\,(y-4) = x-3$$
$$2y - 8 = x - 3$$

Despejando a **x**:

$$\mathbf{x = 2y - 5} \quad \text{.......................................}(2)$$

Sustituyendo **(2)** en **(1)**, desarrollando y simplificando términos semejantes, se obtiene:

$$(2y-5)^2 + y^2 = 49$$
$$4y^2 - 20y + 25 + y^2 = 49$$
$$5y^2 - 20y - 24 = 0$$

Resolviendo para **y**:

$$y = \frac{20 \pm \sqrt{400+480}}{10} = \frac{20 \pm \sqrt{880}}{10} = \frac{20 \pm 4\sqrt{55}}{10} = \frac{10 \pm 2\sqrt{55}}{5} = \frac{10 \pm 14.83}{5}$$

Considerando ambos signos, se tienen los siguientes valores de **y**:

$$\mathbf{y_1} = \frac{10+14.83}{5} = \frac{24.83}{5} = \mathbf{4.97}$$
$$\mathbf{y_2} = \frac{10-14.83}{5} = -\frac{4.83}{5} = \mathbf{-0.97}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación **(2)**, tenemos:

$$\mathbf{x_1} = 2(4.97) - 5 = 9.94 - 5 = \mathbf{4.94}$$
$$\mathbf{x_2} = 2(-0.97) - 5 = -1.94 - 5 = \mathbf{-6.94}$$

Por tanto, los dos puntos que satisfacen el problema son:

$$P_1(4.94, 4.97)\ ,\ P_2(-6.94, -0.97)$$

La ***Figura 19***, muestra gráficamente los resultados obtenidos.

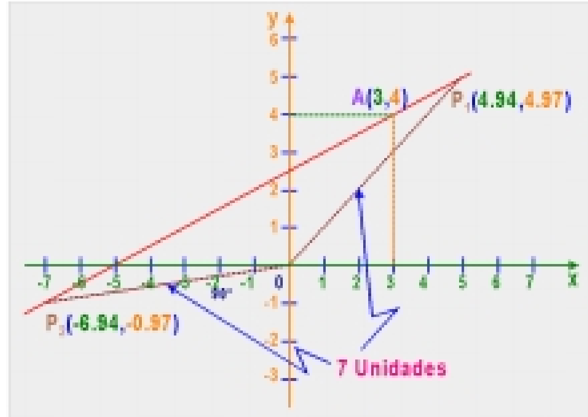

Figura 19

4. Un punto es ***equidistante*** de ***A(2,1)*** y de ***B(-4,3)*** La pendiente de la recta que lo une con ***C(1,-1)*** es de $\frac{2}{3}$. **Encontrar** dicho punto.

SOLUCIÓN

Sea ***P(x,y)*** el punto por determinar. De acuerdo con el enunciado, la distancia de ***P*** a ***A*** y de ***P*** a ***B*** debe ser la misma, es decir: $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos a la expresión anterior:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando y reduciendo términos semejantes:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9$$
$$4y = 12x + 20$$

Despejando a **y**:

$$y = 3x + 5 \quad \text{..(1)}$$

Según el enunciado, la ***pendiente*** del segmento $\overline{PC}$, está dada por:

$$m = \frac{2}{3}$$

La ecuación de la recta con pendiente ***m*** que pasa por el punto ***C***, está dada por la fórmula **(VIII)**, en la cual sustituimos los datos conocidos para tener:

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 1)$$
$$3(y+1) = 2(x-1)$$
$$3y + 3 = 2x - 2$$

Rearreglando la ecuación anterior:

$$2x - 3y = 5 \quad \text{..(2)}$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Sustituyendo **(1)** en **(2)**, desarrollando y reduciendo términos semejantes, se obtiene:

$$2x - 3(3x + 5) = 5$$
$$2x - 9x - 15 = 5$$
$$-7x = 20$$

Despejando a **x**:

$$\mathbf{x = -\frac{20}{7}}$$

Sustituyendo el valor de **x** en **(1)**:

$$\mathbf{y} = 3\left(-\frac{20}{7}\right) + 5 = -\frac{60}{7} + \frac{35}{7} = \mathbf{-\frac{25}{7}}$$

Por tanto, las ***coordenadas*** del punto buscado son:

$$\mathbf{P\left(-\frac{20}{7}, -\frac{25}{7}\right)}$$

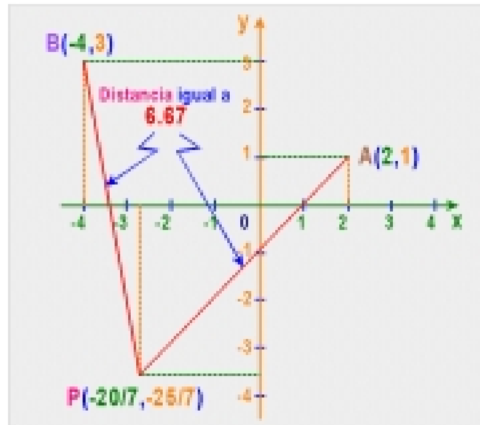

Figura 20

La ***Figura 20***, muestra gráficamente los resultados obtenidos.

Otra forma de resolver el problema se presenta a continuación: Apoyándonos en la ***figura 20***, las coordenadas del ***punto medio*** **M** del segmento $\overline{AB}$ son:

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -1$$

$$y_M = \frac{y_B + y_A}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

Por tanto, las coordenadas del punto **M** son:

$$\mathbf{M(-1, 2)}$$

Por ser recta que pasa por dos puntos conocidos, su ***pendiente*** está dada por:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{1 - 3}{2 + 4} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Para obtener la ecuación de la ***mediatriz*** del lado $\overline{AB}$, se aplica la ecuación de la recta que pasa por un ***punto dado***, fórmula **(VIII)**, y como son ***perpendiculares*** su ***pendiente*** será ***recíproca*** y de ***signo contrario***, por lo que:

$$y - 2 = 3(x + 1) = 3x + 3$$

Despejando a **y**:

$$y = 3x + 5 \quad \text{.................}(1)$$

La ecuación de la recta que pasa por el punto ***C*** es de la forma **(VIII)**, en donde $m = \frac{2}{3}$ según el enunciado. Por tanto:

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 1) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

Despejando a **y**:

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \quad \text{.................}(2)$$

Igualando **(1)** y **(2)**, reduciendo términos semejantes y simplificando, se tiene:

$$3x + 5 = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$
$$9x + 15 = 2x - 5$$
$$7x = -20$$

Despejando a **x**

$$x = -\frac{20}{7}$$

Sustituyendo en **(1)**:

$$y = -\frac{60}{7} + \frac{35}{7} = -\frac{25}{7}$$

Por tanto, las coordenadas del punto ***P*** buscado son:

$$P\left(-\frac{20}{7}, -\frac{25}{7}\right)$$

5. Un ***triángulo equilátero*** tiene su ***base*** en el eje de las **x** y su ***vértice*** en el punto ***C(3,5)***. **Determinar** las ***ecuaciones*** de sus lados.

SOLUCIÓN

Como la ***base*** del ***triángulo*** se encuentra sobre el eje de las **x**, la ecuación del lado $\overline{AB}$ es $y = 0$.

De las propiedades del ***triángulo***, se sabe que:

$$m_{\overline{AC}} = \tan 60° = \sqrt{3}$$
$$m_{\overline{BC}} = \tan 120° = -\sqrt{3}$$

La ecuación del lado $\overline{AC}$, se obtiene de acuerdo con la fórmula **(VIII)**. Sustituyendo datos:

$$y-5=\sqrt{3}\,(x-3)=\sqrt{3}\,x-3\sqrt{3}$$

Despejando a **y**:

$$\mathbf{y}=\sqrt{3}\,x+5-3\sqrt{3}=\sqrt{3}\,\mathbf{x-0.19}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, la ecuación del lado $\overline{BC}$ será:

$$y-5=-\sqrt{3}\,(x-3)=-\sqrt{3}\,x+3\sqrt{3}$$

Despejando a **y**:

$$\mathbf{y}=-\sqrt{3}\,x+5+3\sqrt{3}=\mathbf{-\sqrt{3}\,x+10.19}$$

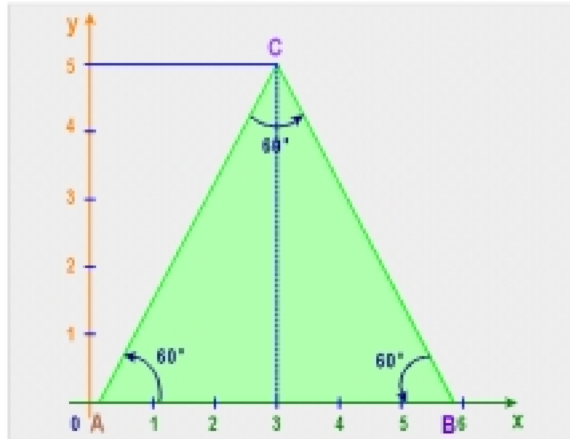

Figura 21

La ***Figura 21*** muestra gráficamente los resultados obtenidos.

6. Los ***vértices*** de un triángulo son: ***A(4,-2)***, ***B(-4,-4)*** y ***C(1,2)***. **Determinar** el ***centro de la circunferencia*** circunscrita a dicho triángulo.

SOLUCIÓN

Los datos del problema se presentan gráficamente en la ***Figura 22***:

El ***centro P*** es el punto donde concurren las tres ***mediatrices***, por lo que basta determinar la ***intersección*** de dos cualesquiera de ellas, por lo que determinaremos sus ecuaciones.

De esta manera, de acuerdo a la ***figura*** adjunta, para el ***punto medio*** del lado $\overline{AC}$, M_1, se tiene:

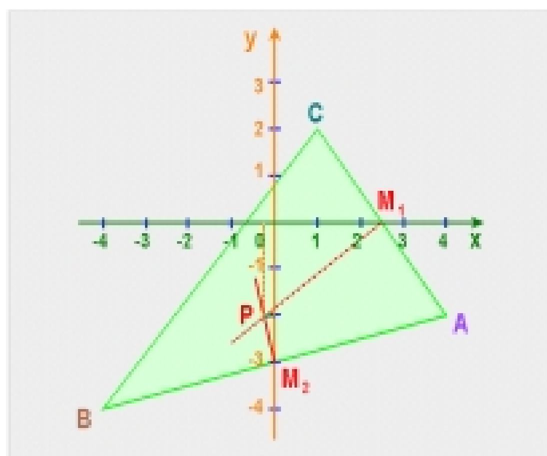

Figura 22

$$x_{M_1}=\frac{x_C+x_A}{2}=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$$

$$y_{M_1}=\frac{y_C+y_A}{2}=\frac{2-2}{2}=0$$

Por tanto la coordenadas del punto M_1 son:

$$\mathbf{M_1\left(\frac{5}{2},0\right)}$$

Para el **punto medio** del lado $\overline{AB}$, ***M_2***, se obtiene:

$$x_{M_2} = \frac{x_B + x_A}{2} = \frac{-4+4}{2} = 0$$

$$y_{M_2} = \frac{y_B + y_A}{2} = \frac{-4-2}{2} = -3$$

Por tanto las coordenadas del punto ***M_2*** son:

$$\mathbf{M_2(0,-3)}$$

Ahora para determinar las ***pendientes*** de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, aplicamos la fórmula $\tan\theta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ya conocida, las cuales, para las mediatrices serán recíprocas y de signo contrario, por lo que la ***pendiente*** del lado $\overline{CA}$ es:

$$m_{\overline{CA}} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2+2}{1-4} = -\frac{4}{3}$$

Y la ***pendiente*** del lado $\overline{BA}$ es:

$$m_{\overline{BA}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4+2}{-4-4} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

Una vez conocidos los resultados anteriores, aplicando la fórmula **(VIII)**, obtendremos la ecuación de la ***mediatriz*** del lado $\overline{CA}$ es:

$$y - 0 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

Desarrollando y despejando a **y**:

$$\mathbf{y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{8}}$$ ....**(1)**

Aplicando la fórmula **(VIII)**, se obtendrá la ecuación de la ***mediatriz*** del lado $\overline{BA}$:

$$y + 3 = -4(x - 0)$$

Desarrollando y despejando a **y**:

$$\mathbf{y = -4x - 3}$$ ....**(2)**

Haciendo simultáneas **(1)** y **(2)**:

$$\frac{3}{4}x-\frac{15}{8}=-4x-3$$

Quitando denominadores:

$$6x-15=-32x-24$$

$$38x=-9$$

Despejando a **x**:

$$\mathbf{x=-\frac{9}{38}}$$

Sustituyendo en **(2)**:

$$y=-4\left(-\frac{9}{38}\right)-3=\frac{18}{19}-\frac{57}{19}=\mathbf{-\frac{39}{19}}$$

Por tanto, las coordenadas del centro ***P*** de la ***circunferencia circunscrita*** en el triángulo son:

$$\mathbf{P\left(-\frac{9}{38},-\frac{39}{19}\right)}$$

7. Una ***diagonal*** de un ***cuadrado*** une los ***vértices A(1,2)*** y ***C(2,5)***. **Obtener** las ***ecuaciones*** de los ***lados*** del ***cuadrado***.

SOLUCIÓN

Tomando en consideración que cada ***lado*** del ***cuadrado*** forma un ángulo de **45°** con la ***diagonal***, podemos aplicar la fórmula **(VI)** en la cual:

$$\mathbf{tan\ V}=\tan\ 45°=1$$

$$\mathbf{m_1}=\text{pendiente del lado }\overline{BC}=?$$

$$\mathbf{m_2}=\text{pendiente del lado }\overline{AC}$$

Donde, con apoyo de la expresión $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, se tiene que la ***pendiente*** del lado $\overline{\mathbf{AC}}$ es:

$$\mathbf{m_2}=\frac{5-2}{2-1}=\mathbf{3}$$

Sustituyendo en la fórmula **(VI)** y simplificando:

$$1=\frac{3-m_1}{1+3\ m_1}$$

$$1+3m_1=3-m_1$$

$$4m_1=2$$

Despejando a m_1, se obtiene:

$$m_1 = \frac{1}{2}$$

Que es la ***pendiente*** del lado $\overline{BC}$.

De esta manera, la ***ecuación*** del lado $\overline{BC}$ se obtiene sustituyendo valores en la fórmula **(VIII)**:

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 2) = \frac{1}{2}x - 1$$

Despejando a **y**:

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

Similarmente, la ecuación del lado $\overline{CD}$, el cual es ***perpendicular*** al lado $\overline{BC}$, es decir ***m*=-2**; sustituyendo datos se tiene:

$$y - 5 = -2(x - 2) = -2x + 4$$

Despejando a **y**:

$$y = -2x + 9$$

Para la ecuación del lado $\overline{AD}$ se tiene:

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Despejando a **y**:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Para la ecuación del lado $\overline{BA}$, el cual es ***perpendicular*** al lado $\overline{BC}$, por lo que ***m*=-2**; sustituyendo valores:

$$y - 2 = -2(x - 1) = -2x + 2$$

Despejando a **y**:

$$y = -2x + 4$$

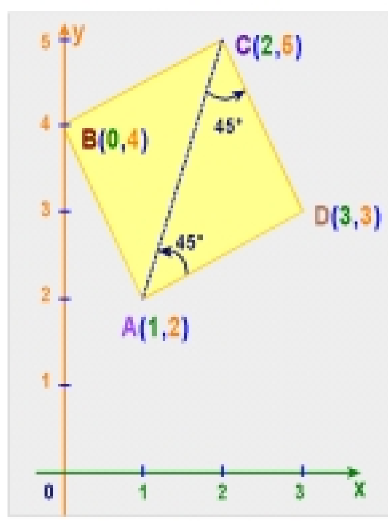

Figura 23

La ***Figura 23*** muestra gráficamente los resultados obtenidos.

8. Trazando ***perpendiculares*** desde el punto ***P(5,0)*** sobre los ***lados*** del ***triángulo*** cuyos ***vértices*** son ***A(4,3)***, ***B(-4,3)*** y ***C(0,-5)***. **Demuéstrese** que los ***pies*** de las ***perpendiculares*** están en ***línea recta***.

SOLUCIÓN

La ***Figura 24*** muestra gráficamente los datos del problema.

De la ***Figura 24***, el punto ***D*** es de obtención inmediata: ***D(5,3)***

Basándose en la fórmula **(IX)**, ***línea recta*** que pasa por ***dos puntos***, la ecuación del lado $\overline{AC}$ es:

$$y-3=\frac{-5-3}{0-4}(x-4)=\frac{-8}{-4}(x-4)=2(x-4)=2x-8$$

Despejando a **y**:

$$\mathbf{y=2x-5} \quad \text{...}\mathbf{(1)}$$

Con el propósito de encontrar las coordenadas del punto ***E***, la ecuación de la perpendicular $\overline{PE}$ al lado $\overline{AC}$, con pendiente $\mathbf{m}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ y como la recta pasa por el punto ***P(5,0)***, se tiene:

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-5)$$

Despejando a **y**:

$$\mathbf{y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}} \quad \text{...}\mathbf{(2)}$$

Haciendo simultáneas **(1)** y **(2)**, por ser ***rectas concurrentes***, se tiene:

$$2x-5=\frac{-1}{2}x+\frac{5}{2}$$

Multiplicando por **2** ambos miembros:

$$4x-10=-x+5$$

$$5x=15$$

Despejando a ***x***:

$$\mathbf{x=3}$$

Sustituyendo en **(1)**:

$$y=2(3)-5=6-5=1 \quad \therefore \quad \mathbf{y=1}$$

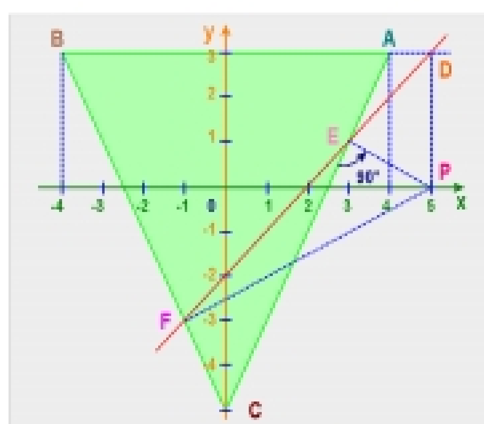

Figura 24

Por tanto las coordenadas del punto ***E*** son: ***E(3, 1)***

Siguiendo el mismo procedimiento, la ecuación del lado $\overline{BC}$ está dada por la fórmula **(IX)**, por ser recta que pasa por ***dos puntos dados***; por lo que:

$$y-3=\frac{-5-3}{0+4}(x+4)=-2(x+4)=-2x-8$$

Despejando a **y**:

$$\mathbf{y=-2x-5} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

La ecuación de la perpendicular $\overline{PF}$ al lado $\overline{BC}$ está dada por la fórmula **(VIII)**, por ser recta que pasa por el punto dado ***P(5,0)***, con ***pendiente*** $\mathbf{m=\frac{1}{2}}$:

$$y-0=\frac{1}{2}(x-5)$$

Despejando a **y**:

$$\mathbf{y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Haciendo simultáneas a **(3)** y **(4)**, por ser rectas concurrentes, se tiene:

$$\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}=-2x-5$$

Multiplicando por **2** ambos miembros:

$$x-5=-4x-10$$
$$5x=-5$$

Despejando a **x**:

$$\mathbf{x=-1}$$

Sustituyendo en **(3)**:

$$\mathbf{y}=-2(-1)-5=2-5=\mathbf{-3}$$

Por tanto las coordenadas del punto ***F*** son:

$$\mathbf{F(-1,-3)}$$

Como ya conocemos las coordenadas de los puntos ***D***, ***E*** y ***F***, recurrimos ahora a la condición para que tres puntos estén alineados:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \\ -1 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 5-9-3-9+1+15 = 21-21 = 0$$

Siendo nulo el determinante, queda demostrado que los ***pies*** de las ***perpendiculares*** o sean los puntos ***D***, ***E*** y ***F***, ***están en línea recta***.

9. Ecuación para la *distancia* de un punto a una línea recta.

Este concepto es de gran utilidad cuando se trabaja con ***puntos*** y ***rectas*** y las relaciones entre ellos.

Obtendremos una fórmula para calcular la ***distancia*** desde un ***punto dado*** por sus coordenadas hasta una ***recta*** dada por su ecuación. ***Distancia*** que consideraremos siempre como la ***mínima***; es decir, la ***distancia*** medida sobre la ***perpendicular*** a la ***recta*** dada y que pasa por el ***punto dado***, como se ve en la ***Figura 25***:

Desde el punto ***P*** se trazan las ***perpendiculares*** a la ***recta*** y al eje de las **x** y formamos el triángulo rectángulo ***EFP***.

Del triángulo rectángulo ***EFP*** se deduce:

$$\cos A = \frac{d}{\overline{EP}}$$

Despejando a ***d***:

$$\mathbf{d = \overline{EP} \cos A} \qquad \textbf{(1)}$$

Pero:

$$\overline{EP} = \overline{HP} - \overline{EH}$$

Donde:

$$\overline{HP} = y_1$$
$$\overline{EH} = m x_1 + b$$

Sustituyendo:

$$\mathbf{\overline{EP} = y_1 - m x_1 - b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(2)}$$

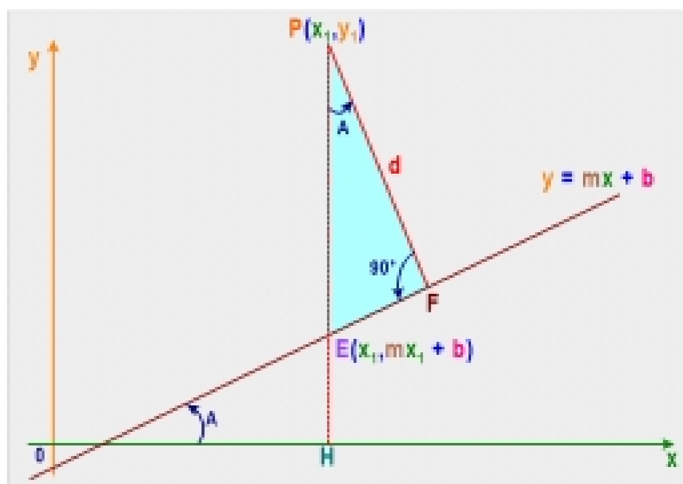

Figura 25

Además, de la expresión pitagórica:

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

La cual se puede expresar como:

$$\sec A = \pm\sqrt{1+\tan^2 A}$$

y como se sabe que:

$$\tan\ A = m$$

Por otra parte, tenemos:

$$\cos A\ =\ \frac{1}{\sec A}$$

En la que sustituyendo los datos anteriores queda:

$$\cos A = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+m^2}} \quad \text{...(3)}$$

Sustituyendo **(2)** y **(3)** en **(1)**:

$$\mathbf{d = \frac{y_1 - m\,x_1 - b}{\pm\sqrt{1+m^2}}} \quad \text{... (X)}$$

Cuya expresión se le conoce como ***fórmula de la distancia de un punto dado a una recta dada***. Los subíndices corresponden a las coordenadas del punto ***P(x_1,y_1)***.

Se ha convenido en que la ***distancia*** sea ***positiva*** siempre que el punto esté ***arriba*** de la recta y ***negativa*** si está ***abajo***. En estas condiciones, tal parece que el doble signo de la fórmula debe emplearse en cada caso el que convenga, para que la ***distancia*** resulte con el signo que le corresponda. Sin embargo, la fórmula tiene la propiedad de dar automáticamente la distancia y su signo algebraico empleando siempre ± antes del radical, o sea que la fórmula se expresa definitivamente de la siguiente manera:

$$\mathbf{d = \frac{y_1 - m\,x_1 - b}{\sqrt{1+m^2}}} \quad \text{.. (X')}$$

9.1 Ejercicios

1. **Calcular** la ***distancia*** desde el punto ***P(7,-3)*** hasta la recta **y = x - 2**.

SOLUCIÓN

Aplicando la fórmula **(X')**, para la cual según los datos: y_1**=-3**, x_1**=7**, ***m*****=1** y **b=-2**.

$$\mathbf{d}\ =\ \frac{-\ 3-(1)(7)-(-2)}{\sqrt{1+1}}\ =\ \frac{-\ 8}{\sqrt{2}}\ =\ -\ \frac{8\ \sqrt{2}}{2}\ =\ \mathbf{-\ 4\sqrt{2}}$$

Por ser de ***signo negativo*** el resultado, el punto está por ***debajo*** de la línea recta.

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

2. **Calcular** la ***distancia*** desde el punto ***Q(5,8)*** hasta la recta **y = x - 2**.

SOLUCIÓN

Aplicando la fórmula **(X')**, con los datos: $y_1=8$, $x_1=5$, $m=1$ y $b=-2$.

$$d = \frac{8-(1)(5)-(-2)}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Como el resultado tiene ***signo positivo***, el punto está ***arriba*** de la línea recta.

Cuando, en particular, se trata de la ***distancia*** del ***origen*** del sistema de coordenadas a una recta, como las coordenadas del ***origen*** del sistema son nulas, la fórmula **(X')** simplemente se reduce a la siguiente:

$$d = \frac{-b}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{..(X'')}$$

La ***Figura 26*** muestra gráficamente la situación anterior.

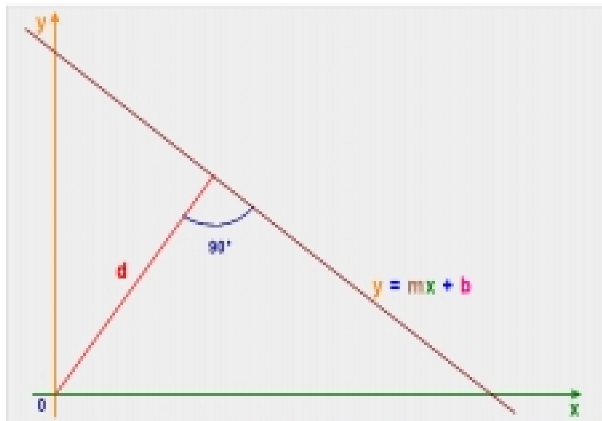

Figura 26

3. **Calcular** la ***distancia*** entre las rectas cuyas ecuaciones son:

$$y = \frac{4}{3}x - 6 \quad , \quad y = \frac{4}{3}x$$

SOLUCIÓN

Como las rectas dadas son ***paralelas***, es decir tienen la misma pendiente, la ***distancia*** es la misma en cualquier región de ellas, como se observa en la ***Figura 27***. En este caso, para mayor facilidad la ***distancia*** la calculamos desde el ***origen*** del sistema, por donde pasa una de ellas, hasta la recta $y = \frac{4}{3}x - 6$. Se puede ver que ***O(0,0)***, **b=-6** y ***m=4/3***, entonces aplicando la fórmula **(X'')**, se obtiene:

$$d = \frac{6}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{6}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{6}{\frac{5}{3}} = \frac{18}{5}$$

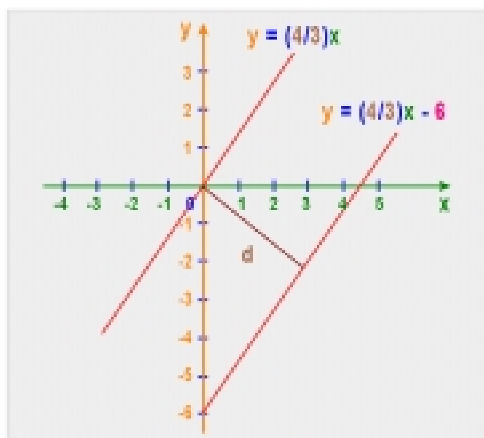

Figura 27

Cuando la ***ecuación*** de la línea recta está expresada en su forma ***implícita***, es decir, cuando tiene la forma **Ax+By+C=0**, la fórmula **(X')** toma el aspecto que indicaremos enseguida. Por lo pronto, de la ecuación de la recta se deduce:

$$Ax + By + C = 0$$
$$By = -Ax - C$$
$$\mathbf{y = \frac{-A}{B}\,x + \frac{-C}{B}}$$

En donde, de acuerdo a la ecuación **y=*m*x+b** tenemos que:

$$\mathbf{m = \frac{-A}{B}} \quad \text{y} \quad \mathbf{b = \frac{-C}{B}}$$

Sustituyendo en la fórmula **(X')** se tiene:

$$d = \frac{y_1 + \frac{A x_1}{B} + \frac{C}{B}}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{B^2}}} = \frac{\frac{A x_1 + B y_1 + C}{B}}{\sqrt{\frac{A^2 + B^2}{B^2}}}$$

Simplificando:

$$\mathbf{d = \frac{A x_1 + B y_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \quad \text{...} \quad \textbf{(XI)}$$

En esta expresión no existe la misma propiedad de que la distancia resulte automáticamente con todo y su signo, sino que la fórmula realmente debe expresarse así:

$$\mathbf{d = \frac{A x_1 + B y_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}} \quad \text{...} \quad \textbf{(XI')}$$

Del ***doble signo*** se empleará en cada caso el que convenga para que la ***distancia*** resulte con todo y su signo verdadero. Por consiguiente, consideraremos como más útil la fórmula **(X')**.

4. **Determinar** las ecuaciones de las ***tangentes*** trazadas desde el punto ***P*(*- 2*,*4*)**, hasta una ***circunferencia*** con centro en el origen del sistema de coordenadas, cuyo ***radio*** mide **2** unidades.

SOLUCIÓN

Cada una de las ***tangentes*** debe tener una ecuación obtenida de la fórmula **(VIII)**, recta que pasa por un ***punto dado***. Sustituyendo las coordenadas de ***P***:

$$y - 4 = m\left(x + \frac{1}{2}\right) = m\,x + \frac{m}{2}$$

Despejando a y:

$$y = m\,x + \frac{m}{2} + 4 \quad \text{...(1)}$$

Esta ecuación estará perfectamente definida en cuanto conozcamos el valor de la pendiente ***m***.

Precisamente con el fin de calcularla, tomaremos en cuenta que en los puntos de tangencia, el ***radio*** igual a **2** puede considerarse como la ***distancia*** del origen a cada ***tangente***, por lo cual podemos emplear la fórmula **(X")**, para la cual se tienen:

$$d = 2$$

$$b = \frac{m}{2} + 4$$

$$m = ?$$

Así que sustituyendo tenemos:

$$2 = \frac{-\left(\frac{m}{2} + 4\right)}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Elevando a cuadrado ambos miembros:

$$4 = \frac{\left(\frac{m}{2} + 4\right)^2}{1 + m^2}$$

Desarrollando y simplificando términos semejantes:

$$4 + 4\,m^2 = \frac{m^2}{4} + 4\,m + 16$$

Eliminando el denominador, multiplicamos por **4**:

$$16 + 16\,m^2 = m^2 + 16\,m + 64$$

Rearreglando la ecuación:

$$15\,m^2 - 16\,m - 48 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$$\mathbf{m} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 2880}}{30} = \frac{16 \pm \sqrt{3136}}{30} = \frac{\mathbf{16 \pm 56}}{\mathbf{30}}$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

De lo anterior, se obtiene:

$$m_1 = \frac{16+56}{30} = \frac{72}{30} = \mathbf{\frac{12}{5}}$$

$$m_2 = \frac{16-56}{30} = \frac{-40}{30} = \mathbf{-\frac{4}{3}}$$

Si sustituimos estos valores de ***m*** en la ecuación **(1)**, obtendremos las ecuaciones de las ***tangentes***:

$$y = \frac{12}{5}x + \frac{\frac{12}{5}}{2} + 4 = \frac{12}{5}x + \frac{12}{10} + \frac{40}{10} = \frac{12}{5}x + \frac{52}{10} = \mathbf{\frac{12}{5}x + \frac{26}{5}}$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{\frac{4}{3}}{2} + 4 = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{6} + \frac{24}{6} = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{6} = \mathbf{-\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}}$$

La ***Figura 28*** muestra gráficamente los resultados obtenidos.

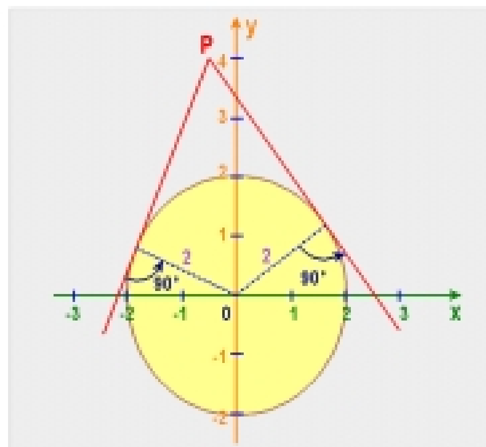

Figura 28

5. Utilizando la ***fórmula*** de la distancia de un punto a una recta, **calcular** el ***área*** del ***triángulo*** cuyos ***vértices*** son: ***A(-3,4)***, ***B(5,3)*** y ***C(2,0)***

SOLUCIÓN

La ***Figura 29*** muestra gráficamente los datos y resultados obtenidos:

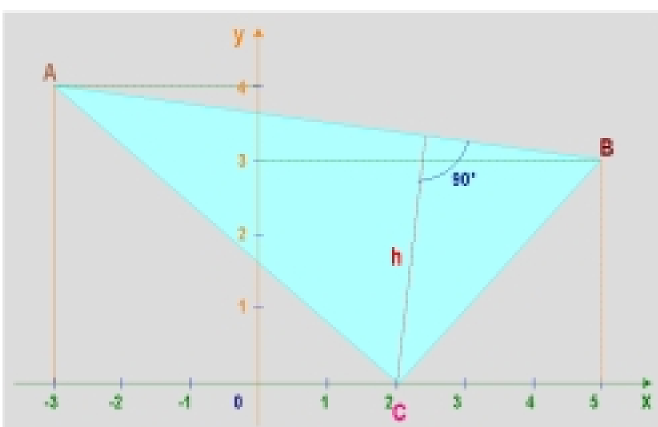

Figura 29

Se sabe que el área de un triángulo es $A = \frac{b\,h}{2}$. Tomaremos como base **b** el lado $\overline{AB}$ y como altura ***h*** positiva la distancia del punto ***C*** al lado $\overline{AB}$, como se puede ver en la ***Figura 29***.

La longitud de la base **b**, distancia del lado $\overline{AB}$, está dada por la fórmula **(I)** vista en el **Capítulo I**:

$$b = \text{base} = \overline{AB} = \sqrt{(-3-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65} \quad \therefore \quad \mathbf{b = \sqrt{65}}$$

La ecuación del lado $\overline{AB}$ se obtiene aplicando la fórmula **(IX)**:

$$y - 4 = \frac{3 - 4}{5 + 3}(x + 3) = -\frac{1}{8}x - \frac{3}{8}$$

Despejando a **y**:

$$y = -\frac{1}{8}x - \frac{3}{8} + 4 = \mathbf{-\frac{1}{8}x + \frac{29}{8}}$$

La altura ***h*** corresponde a la ***distancia*** de la línea recta al punto ***C(2,0)***, la cual se obtiene utilizando la fórmula **(X')**:

$$d = h = \frac{0 + \frac{1}{8}(2) - \frac{29}{8}}{\sqrt{1 + \frac{1}{64}}} = \frac{\frac{2 - 29}{8}}{\frac{\sqrt{65}}{8}} = \mathbf{-\frac{27}{\sqrt{65}}}$$

Tomando la altura ***h*** positiva y sustituyendo en la fórmula del área de un triángulo, se obtiene el área **S** del triángulo pedida:

$$S = \frac{\sqrt{65}\,\frac{27}{\sqrt{65}}}{2} = \frac{27}{2} = \mathbf{13.5\ u^2}$$

10. *Ecuación simétrica* o *primera forma normal* de la ecuación de la recta.

Si la recta ***no es paralela*** a ninguno de los ejes del sistema de coordenadas, ***intercepta*** a éstos en un punto, como se muestra en la ***Figura 30***. Es decir se conocen los puntos ***p(a, 0)*** y ***p'(0, b)***.

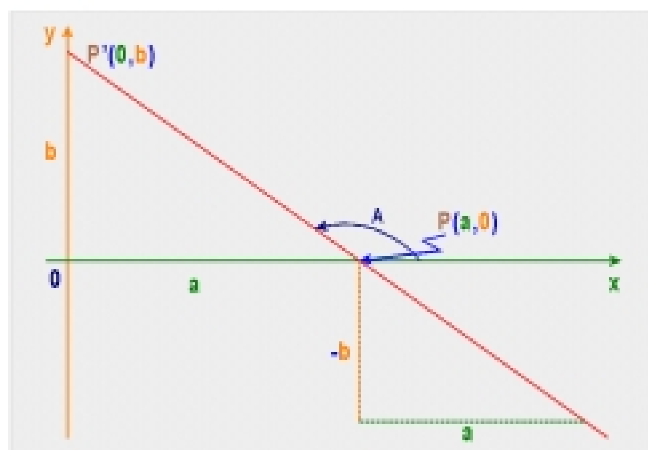

Figura 30

Vamos a expresar la ecuación de la recta en otra forma denominada ***simétrica*** o ***primera forma normal***, en que los ***parámetros*** sean la ***abscisa*** y la ***ordenada*** al origen. Para esto, empezaremos por escribir la ecuación en su forma común, como lo indica la fórmula **(III)**, en la cual la ***tangente*** está dada por:

$$m = \tan A = -\frac{b}{a}$$

Que al sustituir en la fórmula **(III)**, se obtiene:

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

Rearreglando la ecuación y dividiendo entre **b**, se tiene:

$$\frac{b\,x}{a} + y = b$$

$$\frac{b\,x}{a\,b} + \frac{y}{b} = \frac{b}{b}$$

Simplificando, se obtiene finalmente:

$$\mathbf{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \quad \text{.................................} \quad \textbf{(XII)}$$

Que es la llamada ***ecuación simétrica*** de la recta.

Esta ecuación puede considerarse como interesante, porque a partir de ella es muy rápido el trazado de una línea recta o porque a partir de la gráfica respectiva fácilmente se escribe la ecuación.

10.1 Ejercicios

1. **Obtener** la ***ecuación simétrica*** de la recta que pasa por el punto ***P(-6,-2)*** y es ***perpendicular*** a la línea recta $\mathbf{y = -\frac{1}{3}x + 9}$.

SOLUCIÓN

Empezaremos por encontrar la ecuación de la recta según la fórmula **(VIII)**, para la cual ***m* = 3** por condición de ***perpendicularidad***, de acuerdo a la ecuación dada:

$$y + 2 = 3\,(x + 6) = 3\,x + 18$$

Reduciendo términos semejantes y rearreglando la ecuación según la fórmula **(XII)**, se tiene:

$$3\,x - y = -\,16$$

Dividiendo entre **–16**:

$$\frac{3\,x}{-16} - \frac{y}{-16} = 1$$

$$\frac{\mathbf{x}}{-\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}} + \frac{\mathbf{y}}{-\mathbf{16}} = \mathbf{1}$$

Se observa que: $\mathbf{a = -\frac{16}{3}}$ y $\mathbf{b = 16}$

O bien:

Para $\mathbf{y=0}$: $3x=-16$. Por tanto : $\mathbf{x=-\frac{16}{3}=a}$

Para $\mathbf{x=0}$: $-y=-16$. Por tanto : $\mathbf{y=16=b}$

Sustituyendo en la fórmula **(XII)**:

$$\frac{x}{-\frac{16}{3}}+\frac{y}{16}=1$$

2. **Determinar** la ***ecuación*** de una recta que pasa por el punto ***P(3, 2)***, sabiendo que la suma de las ***longitudes*** de los ***segmentos*** que la determinan sobre los ejes de coordenadas es **6**.

SOLUCIÓN

Del enunciado del problema, la ***suma*** de la ***abscisa*** y la ***ordenada*** al origen debe ser igual a **6**, es decir:

$$a+b=6$$

Despejando a **b**:

$$\mathbf{b=6-a} \quad \text{.......................................}\mathbf{(1)}$$

Como la ecuación de la recta por determinar debe ser como la fórmula **(XII)**, se sustituye el valor de **b**:

$$\mathbf{\frac{x}{a}+\frac{y}{6-a}=1} \quad \text{.......................................}\mathbf{(2)}$$

Como la recta pasa por el punto ***P***, las coordenadas de éste deben verificar la ecuación **(2)** Sustituyendo y simplificando:

$$\frac{3}{a}+\frac{\frac{1}{2}}{6-a}=1$$

$$\frac{3\,(6-a)+\frac{a}{2}}{(6-a)\,a}=1$$

$$3\,(6-a)+\frac{a}{2}=(6-a)\,a$$

Multiplicando por **2** ambos miembros:

$$36-6a+a=12a-2a^2$$

Por tanto:

$$2a^2 - 17a + 36 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$$a = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 288}}{4} = \frac{\mathbf{17 \pm 1}}{\mathbf{4}}$$

Los valores de **a** que satisfacen la ecuación son:

$$a_1 = \frac{17+1}{4} = \frac{18}{4} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}$$

$$a_2 = \frac{17-1}{4} = \frac{16}{4} = \mathbf{4}$$

Sustituyendo en **b**; ecuación **(1)**:

$$b_2 = 6 - \frac{9}{2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

$$b_2 = 6 - 4 = \mathbf{2}$$

De los resultados obtenidos, observamos que hay ***dos rectas*** que satisfacen las condiciones del problema, las cuales se obtienen sustituyendo valores en la fórmula **(XII)**:

$$\frac{x}{\frac{9}{2}} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$$

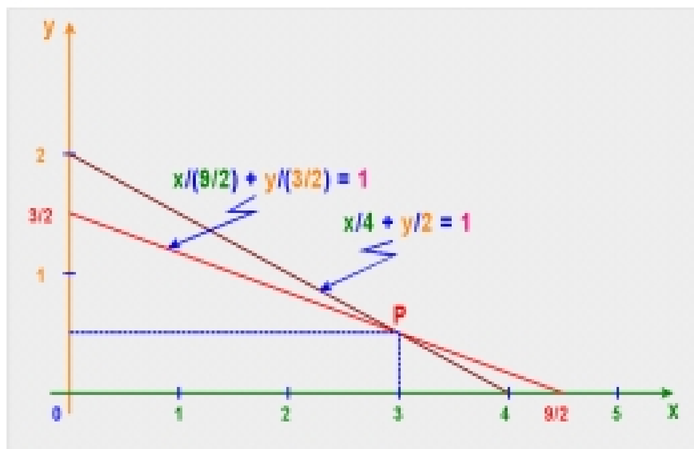

Figura 31

La ***Figura 31*** muestra gráficamente, los resultados obtenidos.

11. *Segunda forma normal* de la ecuación de la recta o *ecuación de Hess*.

La recta queda determinada por la ***longitud de su perpendicular*** trazada desde el origen del sistema de coordenadas y el ángulo positivo ***B***, que la ***perpendicular*** forma con el eje de las **x**.

La ***perpendicular*** a la recta se representa por ***p***, la cual se considera siempre ***positiva*** por ser una ***distancia***. Ver la ***Figura 32***.

En este caso, vamos a lograr que la ecuación resultante contenga como parámetros la ***magnitud p positiva***, precisa y rigurosamente ***positiva***, de la ***perpendicular*** llevada del origen de coordenadas a la recta y el ***ángulo*** que esta ***perpendicular*** forma con el eje de la **x**. Partiremos de la ecuación simétrica, fórmula **(XII)**, para la cual:

$$\cos\beta = \frac{p}{a}$$

Despejando a **a**:

$$a = \frac{p}{\cos\beta}$$

Además según la ***Figura 32***:

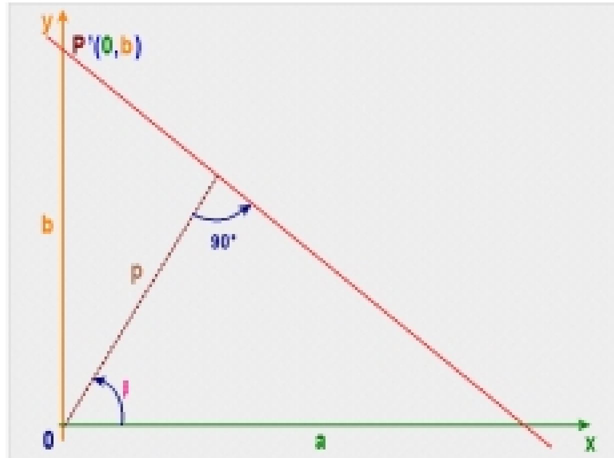

Figura 32

$$\cos(90° - \beta) = \frac{p}{b} = \operatorname{sen}\beta$$

Despejando a **b**:

$$b = \frac{p}{\operatorname{sen}\beta}$$

Sustituyendo en la fórmula **(XII)**:

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\beta}} + \frac{y}{\frac{p}{\operatorname{sen}\beta}} = 1$$

$$\frac{x\ \cos\beta}{p} + \frac{y\ \operatorname{sen}\beta}{p} = 1$$

Multiplicando ambos miembros por ***p***:

$$x\cos\beta + y\operatorname{sen}\beta = p$$

Finalmente:

$$\mathbf{x\cos\beta + y\operatorname{sen}\beta - p = 0}$$ .... **(XIII)**

Relación en la que β y ***p*** son los parámetros.

Esta es la ***segunda forma normal*** de la ecuación de la recta y sólo falta ver como se puede obtener fácilmente en cada problema a partir de la ecuación con la que tiene más parecido y es con la fórmula **(IV)**, cuya forma es **Ax+By+C=0**.

Para lograr nuestro propósito, debemos admitir que los ***coeficientes*** respectivos de ambas ecuaciones son ***proporcionales***, razón por la cual podemos tener:

$$\frac{\cos\beta}{A} = K. \text{ Por tanto: } \mathbf{\cos\beta = K A}$$ ....**(1)**

$$\frac{\text{sen } \beta}{B} = K. \text{ Por tanto : } \mathbf{sen\ \beta = K\,B} \text{ ....(2)}$$

$$\frac{-\,p}{C} = K. \text{ Por tanto : } \mathbf{p = -\ K\ C} \text{ ....(3)}$$

De **(1)** y **(2)** resulta, elevando al cuadrado:

$$\cos^2\beta = K^2\ A^2$$
$$\text{sen}^2\beta = K^2\ B^2$$

Despejando a **K**:

$$\mathbf{K = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones **(1)**, **(2)** y **(3)**, se tienen las siguientes expresiones:

$$\mathbf{\cos\ \beta = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}} \text{ ....(1´)}$$

$$\mathbf{\text{sen}\ \beta = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}} \text{ ....(2´)}$$

$$\mathbf{p = \frac{-\,C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}} \text{ ....(3´)}$$

De acuerdo con todo esto, la ***ecuación normal*** puede expresarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{\frac{A\,x}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B\,y}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0} \text{ .... XIV}$$

Esta ecuación nos hace ver que para obtener la ***segunda forma normal*** a partir de la ecuación, de la forma general **Ax+By+C=0**, basta dividir ésta entre el radical $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$, debiendo tomar para el radical el signo contrario al que tenga el término independiente **C** en la ecuación dada, con objeto de que el valor de ***p*** sea siempre ***positivo***, como dijimos desde un principio.

11.1 Ejercicios

1. **Obtener** la ***ecuación normal*** de la recta dada por la ecuación: $\mathbf{4\,x - 3\,y - 25 = 0}$.

SOLUCIÓN

Comparando con la ecuación general **Ax + By + C = 0** se tiene que:

A = 4, **B = -3** y **C = -25**

Calculando el radical: $\sqrt{A^2+B^2}$

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = +\mathbf{5}$$

Como el ***signo*** de la raíz cuadrada debe ser ***contrario*** al término independiente, que en este caso, según la ecuación dada es **-25**, así que:

$$\sqrt{A^2+B^2} = +5$$

Una vez definido el ***signo***, dividimos la ecuación dada entre **+5**, es decir:

$$\frac{4\,x}{5} - \frac{3\,y}{5} - \frac{25}{5} = 0$$

Finalmente:

$$\mathbf{\frac{4}{5}\,x - \frac{3}{5}\,y - 5 = 0}$$

2. **Determinar** la ***ecuación normal*** de la recta cuya ecuación es: $\mathbf{6\,x + 8\,y + 33 = 0}$

SOLUCIÓN

En este caso se tiene que:

A = 6; **B = 8** y **C = 33**

Por lo que:

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$$

Tomando ***signo contrario*** al que tiene **C**, dividimos la ecuación dada entre **-10** y queda:

$$\mathbf{-\frac{6}{10}\,x - \frac{8}{10}\,y - \frac{33}{10} = 0}$$

12 Problemas de la línea recta, considerada como *lugar geométrico*.

Veremos en este tema la parte correspondiente a uno de los problemas fundamentales de la ***geometría analítica***, que consiste en encontrar la ecuación representativa ***del lugar geométrico*** que se trate y **comprobar** que las ***coordenadas*** de un punto perteneciente a dicho ***lugar geométrico*** satisfacen a su ecuación.

Se da el nombre de ***lugar geométrico*** a **todo conjunto de puntos que tienen la misma propiedad o que se rigen por la misma ley**. Un ejemplo más sencillo y más común de ***lugar geométrico*** es la ***circunferencia***, puesto que absolutamente ***todos sus puntos participan de la propiedad de equidistar del centro***.

También es un ***lugar geométrico*** la ***mediatriz*** de un segmento de recta, porque todos los puntos de ella equidistan de los extremos del segmento. Lo mismo podemos decir de la ***bisectriz*** de un ángulo, en atención de que todos los puntos de ella equidistan de los lados del ángulo.

Tomando en consideración que todo ***lugar geométrico*** es una línea recta o curva, debe tener una ecuación y para determinarla, en cada caso, se procede de la siguiente manera:

1. Se empieza por suponer la existencia de un punto ***M(x,y)*** dotado de cierta ***ley de movimiento***, en que su recorrido describe el ***lugar geométrico*** en cuestión.

2. Por medio de una ***igualdad*** se escribe la condición de movimiento del punto generador del ***lugar geométrico***.

3. Se hacen intervenir en la condición antes citada las **constantes** o ***datos*** del problema y las ***variables***, que no son más que las coordenadas del punto móvil ***M(x,y)***. La expresión resultante es la **ecuación** del ***lugar geométrico***, en la que comúnmente se hacen las transformaciones necesarias para lograr escribirla en la forma más simple posible.

12.1 Ejercicios

1. **Obtener** la ecuación de la ***mediatriz*** del segmento de recta cuyos ***extremos*** son: ***P(-2,6)*** y ***Q(6,-4)***.

SOLUCIÓN

Haciendo la gráfica (***Figura 33***) de los datos conocidos y aplicando el procedimiento anterior:

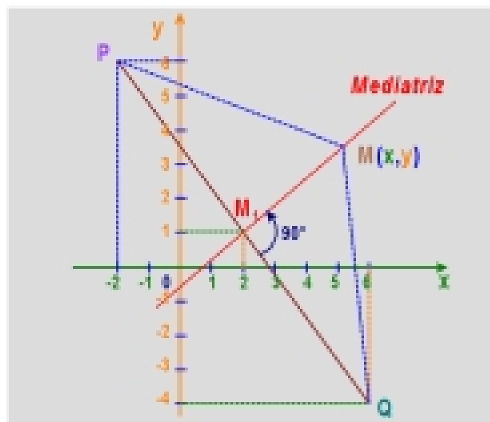

Figura 33

1. Se considera un punto ***M(x,y)*** en ***movimiento***, representado en la ***Figura 33***.

2. La ***condición*** del ***movimiento*** del punto ***M*** es:

$$\overline{MP} = \overline{MQ} \qquad (1)$$

3. Aplicando la fórmula **(I)**, ***distancia*** entre dos puntos, se tiene:

$$\overline{MP} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-6)^2}$$
$$\overline{MQ} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+4)^2}$$

Sustituimos en **(1)**:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+4)^2}$$

Elevando al cuadrado, desarrollando y simplificando:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 8y + 16$$
$$20y = 16x - 12$$

Despejando a y:

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$$

El **resultado** es la ***ecuación de una recta***.

Comprobación: Determinamos las coordenadas del punto medio M_1 del segmento $\overline{PQ}$:

$$x_{M_1} = \frac{-2+6}{2} = 2$$

$$y_{M_1} = \frac{6-4}{2} = 1$$

Por tanto:

$$M_1(2,1)$$

Ahora, la ***pendiente*** de $\overline{PQ} = \frac{6+4}{-2-6} = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}$. Por lo que $m = \frac{4}{5}$, por ser ***perpendiculares***. De esta forma la ecuación de la ***mediatriz*** es:

$$y - 1 = \frac{4}{5}(x-2) = \frac{4}{5}x - \frac{8}{5}$$

Finalmente, despejando a **y**:

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$$

Con lo cual se **comprueba** el resultado obtenido.

2. Obtener las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas cuyas ecuaciones son: **y = x - 4** , **y = -x + 6**.

SOLUCIÓN

Haciendo la gráfica (***Figura 34***) de los ***datos*** dados y las ***bisectrices***:

1. Se considera un ***punto móvil*** ***M(x,y)***, según la figura adjunta, para obtener la ecuación de la ***bisectriz*** $\overline{PQ}$.

2. La ***condición*** de movimiento del punto ***M*** es:

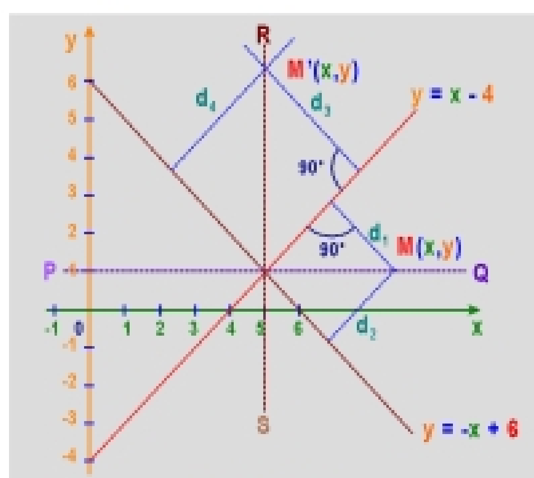

Figura 34

$d_1 = d_2$ ....**(1)**

3. Pero, según la fórmula de la distancia de un punto a una recta, $d = \frac{y_1 - m x_1 - b}{\sqrt{1+m^2}}$.

Sustituyendo valores, se tiene:

$$d_1 = -\frac{y - x + 4}{\sqrt{1+1}} = -\frac{y - x + 4}{\sqrt{2}} \quad (\mathbf{-}\ \text{por estar el punto abajo de la recta})$$

$$d_2 = \frac{y + x - 6}{\sqrt{1+1}} = \frac{y + x - 6}{\sqrt{2}} \quad (\mathbf{+}\ \text{por estar el punto arriba de la recta})$$

Sustituimos en **(1)**:

$$-\frac{y - x + 4}{\sqrt{2}} = \frac{y + x - 6}{\sqrt{2}}$$

$$-y + x - 4 = y + x - 6$$

$$\mathbf{2y = 2}$$

Por tanto, la ecuación de la ***bisectriz*** $\overline{PQ}$ es:

$\mathbf{y = 1}$

Para la ***bisectriz*** $\overline{RS}$, la condición de movimiento del punto ***M'*** es:

$d_3 = d_4$ ....**(2)**

Procediendo de manera similar al caso anterior, se tiene:

$$d_3 = \frac{y - x + 4}{\sqrt{2}}$$

$$d_4 = \frac{y + x - 6}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo en **(2)**:

$$\frac{y - x + 4}{\sqrt{2}} = \frac{y + x - 6}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{2x = 10}$$

Despejando a **x**, obtenemos la ecuación de la ***bisectriz*** $\overline{RS}$:

$\mathbf{x = 5}$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Nombre de archivo:	linea recta	
Directorio:	C:\Geometria_analitica	
Plantilla:	C:\WINDOWS\Application Data\Microsoft\Plantillas\Normal.dot	
Título:	2	
Asunto:		
Autor:	Pablo Fuentes Ramos	
Palabras clave:		
Comentarios:		
Fecha de creación:	21/02/02 07:02 P.M.	
Cambio número:	63	
Guardado el:	06/05/02 10:40 A.M.	
Guardado por:	Pablo Fuentes Ramos	
Tiempo de edición:	2,861 minutos	
Impreso el:	06/05/02 10:41 A.M.	
Última impresión completa		
	Número de páginas:	53
	Número de palabras:	8,167 (aprox.)
	Número de caracteres:	46,557 (aprox.)