6toARQ.-CURSO 6TO-Mat."B"
SÍNTESIS TEÓRICO-PRÁCTICA   PROF. SERGIO WEINBERGER

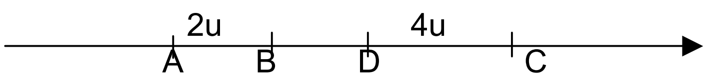
NOTACIONES:

$\overleftrightarrow{AB}$: Segmento

d(A,B) : distancia entre los puntos A y B. Es un **real positivo.**

$\overline{AB}$: Medida algebraica del segmento, es un número real, positivo si desde A hasta B el sentido es positivo, negativo en caso contrario.

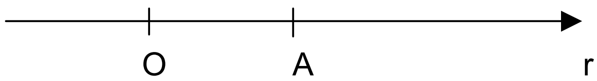
Ejemplos:



$\overline{AB} = 2 \quad \overline{CD} = -4$, mientras que d(A,B)=2 y d(C,D)=4

Propiedad: $\overline{AB} = -\overline{BA}$

ABSCISA DE UN PUNTO : Dado un eje orientado Or, llamamos abscisa de A a la medida algebraica : $\overline{OA}$



De esta manera queda definida una **función biyectiva entre los puntos del eje orientado y los números reales.**

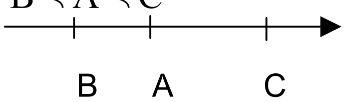
Notación: Para expresar que "a" es la abscisa del punto A escribimos : A(a)

TEOREMA DE CHASLES: A,B,C $\in \overrightarrow{Or} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$

Para demostrar dicho teorema podríamos considerar los seis casos (P_3) en que los puntos A,B y C pueden ordenarse y ver que la relación de Chasles se cumple en cualquiera de ellos. Veremos un solo caso como ejemplo, si

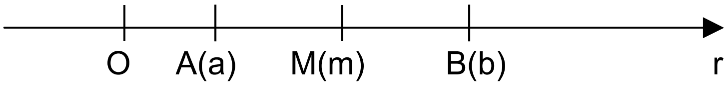
$$B \prec A \prec C \xrightarrow{\text{def.suma segmentos}} \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC} \rightarrow -\overline{BA} + \overline{BC} - \overline{CA} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{prop.}} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$



De la misma forma haríamos en las restantes ordenaciones de A, B y C.

MEDIDA ALGEBRAICA- PUNTO MEDIO-PROPORCIONES:



De acuerdo al teorema de Chasles, considerando los puntos O, A y B:

$$\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BO}=0 \xrightarrow{\text{despejamos empleando prop.}} \overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$$

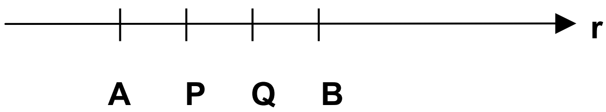
$$\rightarrow \boxed{\overline{AB}=b-a} \text{ y } \boxed{\mathbf{d(A,B)} = |b-a|}$$

Siendo M el punto medio de $\overleftrightarrow{AB}$, tenemos : $\overline{AM}=\overline{MB} \longrightarrow$ m-a=b-m

$$\boxed{M\left(\frac{a+b}{2}\right)} \qquad \longrightarrow \boxed{m=\frac{a+b}{2}}$$

Ejercicio 1 : Dados A(a) y B(b) $\in \overrightarrow{Or}$,demostrar que las abscisas p y q de los puntos P y Q que dividen al segmento $\overleftrightarrow{AB}$ en tres iguales. ($\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}$)

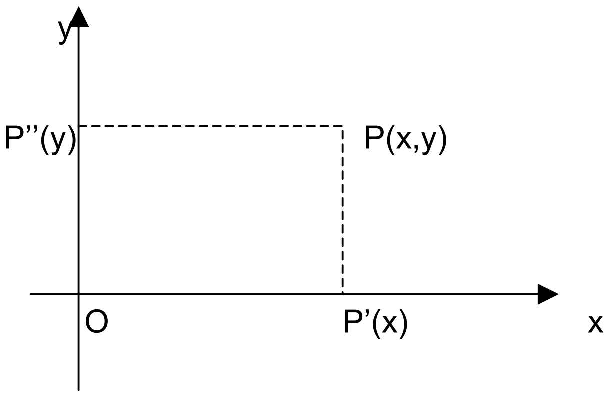
son: p=$\frac{2a+b}{3}$ q = $\frac{a+2b}{3}$.



COORDENADAS EN EL PLANO:

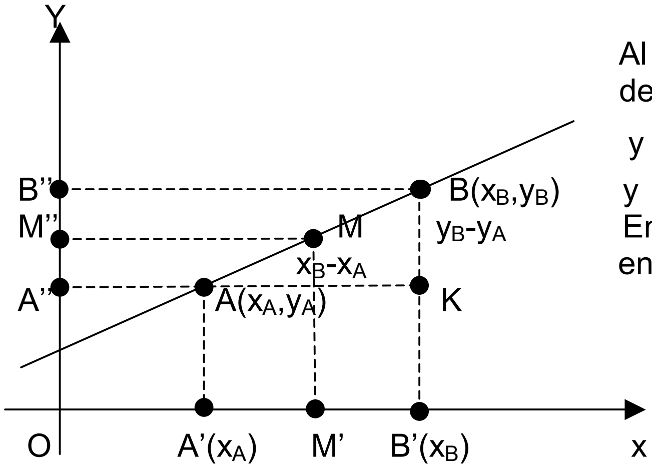
Considerando dos ejes orientados perpendiculares, puede establecerse una **función biyectiva entre los puntos del plano y los pares ordenados de reales,** de la siguiente forma:
Dado un punto P del plano y sus correspondientes proyecciones ortogonales P' en el eje Ox y P'' en el eje, Oy, llamamos :

Abscisa de P : $\overline{OP'}$ = x (abscisa del punto P' en el eje Ox)
Ordenada de P : $\overline{OP''}$ = y (abscisa del punto P'' en el eje Oy)
Coordenadas de P : es el par ordenado (x,y).
Escribimos : P(x,y)



PROPORCIONES Y DISTANCIAS:

Consideremos los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ y su punto medio M



Al ser AA'// MM' // BB', el teorema de Thales nos asegura que M' y M'' son puntos medios de $\overleftrightarrow{A'B'}$ y $\overline{A''B''}$ respectivamente. Empleando entonces lo trabajado en un eje orientado, tenemos:

$$M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$$

Punto medio de $\overleftrightarrow{AB}$

De la misma forma podríamos deducir que las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento $\overleftrightarrow{AB}$ en tres partes iguales son :

$$P(\frac{2x_A + x_B}{2}, \frac{2y_A + y_B}{2}) \qquad Q(\frac{x_A + 2x_B}{2}, \frac{y_A + 2y_B}{2})$$

"Puntos tercios" del segmento $\overline{AB}$

Si consideramos el triángulo rectángulo AKB de la figura, sus dos catetos miden : x_B-x_A e y_B-y_A por lo cual según Pitágoras, su hipotenusa que es :

$$d(A,B)= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Distancia entre los puntos A y B

Observación : Si AB // Ox $\rightarrow$ d(A,B) = ... (completar)
Si AB // Oy $\rightarrow$ d(A,B) = ... (completar)

Ejercicio2 : Dados tres puntos no alineados : $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ y $C(x_C, y_C)$, determinar las coordenadas del baricentro G (corte de las medianas) del triángulo ABC.

Se recuerda la propiedad : si M es el p.m. de $\overline{AB} \rightarrow \overline{MG} = \frac{1}{3}\overline{MC}$

Ejercicio3: Dados A(-1,4), B(5,0) y C(9,2), hallar las coordenadas del punto D sabiendo que ABCD es un paralelogramo. Graficar.
Sugerencia: Si consideramos el punto M, corte de las diagonales, éste es pm de $\overline{AC}$ (propiedad del paralelogramo) por lo cual podemos hallar sus coordenadas. Luego, teniendo en cuenta que M también es p.m de $\overline{BD}$, podemos plantearnos D(x,y) y despejar sus coordenadas.
(Solución D(3,6))

CONDICIÓN DE ALINEACIÓN DE TRES PUNTOS:

$A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ y $C(x_C, y_C)$ alineados $\Leftrightarrow$

$$(y_C - y_A).(x_B - x_A) = (y_B - y_A).(x_C - x_A)$$

Esto puede demostrarse empleando básicamente el teorema de Thales.

ECUACIÓN DE UNA RECTA:

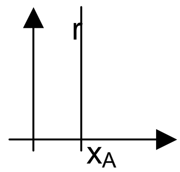
Dados los puntos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, hallaremos la ecuación de AB $\equiv$ r

P(x,y) $\in$r $\Leftrightarrow$ A, B y P están alineados.

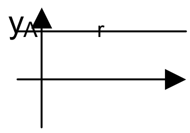
$\xleftrightarrow{\text{cond.alineación}}$ $\boxed{r)\,(y - y_A).(x_B - x_A) = (y_B - y_A).(x - x_A)}$

Ecuación de r

1) si r // Oy $\rightarrow$ $x_B = x_A \rightarrow$ $\boxed{r)\ x = x_A}$ Ecuación de una recta // Oy



2) si r // Ox $\rightarrow$ $y_B = y_A \rightarrow$ $\boxed{r)\ y = y_A}$ Ecuación de una recta // Ox



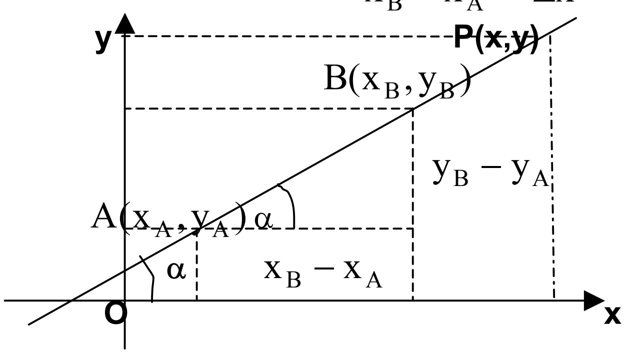
3) si r $\not\parallel$ Oy $\rightarrow x_B \neq x_A \rightarrow$ podemos en la ecuación hallada de r, dividir entre $x_B - x_A$, con lo cual la ecuación queda :

$$\boxed{r)\ y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)}$$

Ecuación de la recta **r $\not\parallel$ Oy** que pasa por $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$

PENDIENTE -ECUACIÓN EXPLÍCITA:

Si **r $\not\parallel$ Oy**, al número m= $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\alpha$ le llamamos **pendiente o coeficiente angular de r.**



De acuerdo a esta definición y con la última ecuación planteada, tenemos:

$\boxed{r)\ y - y_A = m.(x - x_A)}$ **Ecuación de la recta** $r \nparallel Oy$ **conociendo un punto** $A(x_A, y_A)$ **de ella y la pendiente m.**

Haciendo operaciones : r) $y = m.x + \underbrace{y_A - mx_A}_{p}$

Con lo cual la ecuación de la recta puede plantearse :

$\boxed{\mathbf{r)\ y = m.x + p}}$ **Ecuación explícita de una recta** $r \nparallel Oy$

IMPORTANTE:

Si m>0	r es “creciente”
Si m<0	r es “decreciente”
Si m=0	r es // Ox

Si en la primer ecuación obtenida de r, hacemos operaciones y trasponemos términos, obtenemos una ecuación de la forma :

$\boxed{\mathbf{r)\ ax+by+c=0}}$ **Ecuación general de una recta.**

a y b no son nulos simultáneamente.

EJERCICIO4:

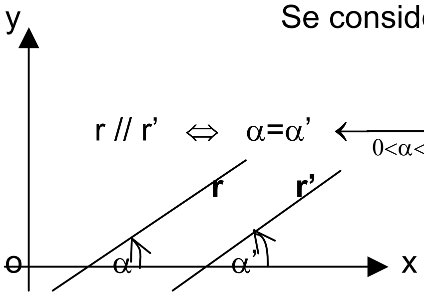
a)

Dada **r) ax+by+c=0,** con b≠0, deducir que $\boxed{m = \frac{-a}{b},\ p = \frac{-c}{b}}$

b) Hallar las pendientes de las rectas :
r) y=- 3x+1 s) 2x –3y +4 = 0 t) y=2 u) x= -3

PARALELISMO:

Se consideran las rectas **r) y = m.x + p y**
r') y = m'.x + p'



$r \,//\, r' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' \xleftrightarrow[0<\alpha<180,\alpha\neq 90]{} tg\alpha = tg\alpha' \Leftrightarrow$ **m = m'**

cond.de paralelismo.

EJEMPLO:

Dados los puntos A(-2,3), B(4,3) y C(-2,5)

a) Hallar ecuaciones de AB, AC y BC.
b) Hallar ecuaciones de las rectas : a que pasa por A y es // BC
   B que pasa por B y es // AC

   Graficar.

Resolución: Las ecuaciones de las rectas AB y AC podemos plantearlas directamente por ser paralelas a los ejes coordenados:

$\boxed{\text{AB) } y=3 \quad \text{AC) } x=-2.}$ Con la ecuación planteada en la página 4 obtenemos la ecuación de : **BC)** $y-5=\dfrac{5-3}{-2-4}(x+2)$, haciendo operaciones obtenemos :

$$\boxed{\text{BC) } y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}}$$

b) De la recta a conocemos un punto A(-2,3) y $m_a=m_{BC}=-\dfrac{1}{3}$

   Empleando la ecuación correspondiente, tenemos: a) $y-3=-\dfrac{1}{3}(x+2)$

   La recta b, al ser // Oy no tiene pendiente, su ecuación sin embargo puede plantearse en forma inmediata: **b) x = 4**

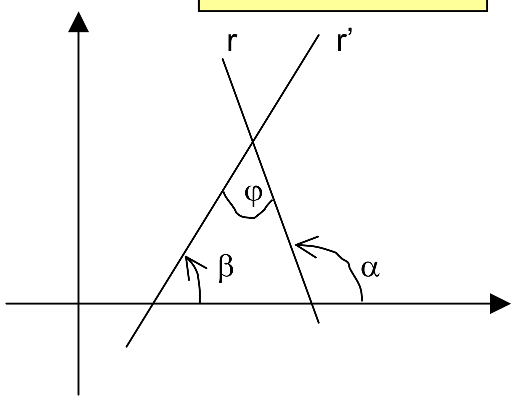
<u>ÁNGULO ENTRE RECTAS-PERPENDICULARIDAD.</u>

Sean : rectas **r) y = m.x + p y r') y = m'.x + p'.**
Queremos hallar el ángulo φ formado entre ambas rectas. Recordamos que $tg\alpha=m$ y $tg\beta=m'$. Para hallar φ, hallaremos su tangente:

$$tg\varphi = tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha.tg\beta} = \frac{m-m'}{1+mm'} \rightarrow \boxed{tg\varphi = \frac{m-m'}{1+mm'}}$$

propiedad.

prop.ángulo externo.



PERPENDICULARIDAD:

$\varphi=90^\circ \Leftrightarrow \nexists\ \mathrm{tg}\varphi \Leftrightarrow 1+mm'=0 \xleftrightarrow{\text{si } m\neq 0} \boxed{m'=-\dfrac{1}{m}}$ **Condición de perpendicularidad.**

$\Downarrow$

$0<\varphi<180^\circ$

(m' es opuesto del inverso de m)

INTERSECCIÓN DE RECTAS:

Sean : r) ax+by+c=0 y r') a'x+b'y+c'=0 . Buscar puntos de intersección equivale a buscar los pares (x,y) que verifiquen ambas ecuaciones, lo cual significa **resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.**

Si $\boxed{\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'} \quad r\equiv r'}$ $\Rightarrow$ las ecuaciones son equivalentes, el sistema es SCI y

Condición de coincidencia.

Si $\boxed{\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'} \quad r\cap r'=\phi}$ $\Rightarrow$ el sistema es incomp. ,las rectas son // **no coincidentes**

Si $\boxed{\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'} \Rightarrow \quad r\cap r'=\{P\}}$ el sistema es comp. y determinado, las **rectas secantes**.

EJEMPLO: Dados A(-1,2), C(2,8) y B(5,0). Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen las alturas del triángulo ABC. Verificar analíticamente que concurren en un punto (llamado ortocentro). Graficar.

Resolución: De cada altura conocemos un punto (vértice) y podemos determinar su pendiente al ser perpendicular al lado correspondiente.

Así por ejemplo : $m_{AB}=\dfrac{2-0}{-1-5}=-\dfrac{1}{3} \xrightarrow{AB\perp h_c} m_{h_c}=3$, C(2,8)

$\Rightarrow h_c)\ y-8=3(x-2) \quad \Rightarrow \boxed{h_c)\ y=3x+2}$

De la misma forma podemos hallar las ecuaciones de las otras alturas, obtenemos:

$$\boxed{h_B)\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \quad y \quad h_A)\ y=\frac{3}{8}x+\frac{19}{8}}$$

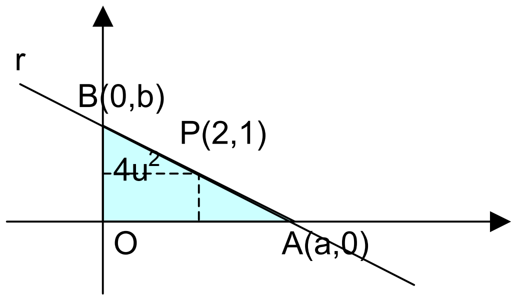
Resolviendo el sistema formado por h_C y h_B obtenemos el punto : $H(\frac{1}{7},\frac{17}{7})$

Si sustituimos sus coordenadas en la ecuación de h_A veremos que verifica dicha ecuación y por tanto las tres alturas concurren en ese punto.

EJERCICIO5:

a) Dados los puntos A(a,0) y B(0,b) con a y b no nulos, demostrar que la ecuación de la recta AB puede escribirse : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

b) Hallar la ecuación de una recta r que pasa por el punto P(2,1) y determina con los ejes coordenados un triángulo de área $4u^2$. Hallar todas las soluciones para r.
(se sugiere tomar como incógnitas los puntos A(a,0) y B(0,b) en que la recta r corta los ejes, deberá imponerse que P verifique la ecuación de la recta r, y además que el área del triángulo : $\frac{1}{2}$ | a.b | = 4)



EJERCICIO6: Se considera el triángulo ABC con A(1,2), B(2,-2) y C(-3,- 4)

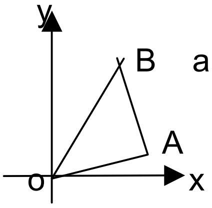
a) Hallar las ecuaciones de las mediatrices del triángulo y verificar analíticamente que concurren en un punto Q (circuncentro)
b) Hallar ecuaciones de las alturas y coordenadas del ortocentro H.
c) Hallar coordenadas del baricentro G (tener en cuenta ej. 2)
d) Demostrar que Q, H y G están alineados.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA:

Dados: un punto $A(x_A, y_A)$ y una recta **r) ax+by+c=0,** aceptaremos la siguiente fórmula para hallar la distancia del punto a la recta:

$$d(A,r)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

EJERCICIO7: Se consideran los puntos : O(0,0) ; A(a,b)$\not\equiv$ O y B(a-b,a+b).

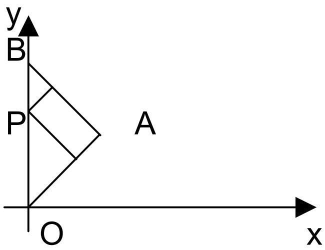


a) Demostrar que OA $\perp$ AB y que $d(O,B)=\sqrt{2}.d(O,A)$

b) Sean O,A y B los puntos dados para a=b=2 ; P(0,p) $\in \overleftrightarrow{OB}$.

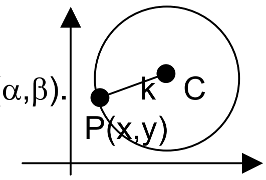
i) Hallar ecuaciones generales de OA y AB

ii) Demostrar que d(P,OA)+d(P,AB)=d(O,A)



CIRCUNFERENCIA:

Definición: Dado un punto C y un número real k>0, llamamos circunferencia de centro C y radio k al lugar geométrico de los puntos del plano que distan k unidades del punto C. Notación :Escribimos $\mathcal{C}$ (C,k)



Ecuación: Se considera la circunferencia $\mathcal{C}$ (C,k) siendo C(α,β). P(x,y) es un punto genérico de $\mathcal{C}$,

P(x,y) $\in \mathcal{C}$

$$\xleftrightarrow{\text{def.cfa}} d(P,C)=k \xleftrightarrow{\text{fórmula de distancia}} \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=k>0 \xleftrightarrow{\text{elevamos a la 2}}$$

(A)

$$\boxed{\mathcal{C})\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=k^2}$$

Ecuación de la cfa. de centro C(α,β) y radio k.

Desarrollando tenemos:

(B)

$$\boxed{\mathcal{C})\ x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-k^2=0}$$

Ecuación de segundo grado en x e y con coeficientes iguales en x^2 e y^2. Puede escribirse: (C)

$$\boxed{\mathcal{C})\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \quad \text{siendo : } D=-2\alpha\ ,\ E=-2\beta,\ F=\alpha^2+\beta^2-k^2}$$

Observamos que la ecuación anterior corresponde a una cfa. $\Leftrightarrow$ $k^2>0 \Leftrightarrow$

$$\alpha^2+\beta^2-F>0 \Leftrightarrow k^2=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F>0 \quad \Leftrightarrow k^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}>0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{D^2+E^2-4F>0}$$

En este caso $k=\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$ $\quad C(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2})$

radio y centro de la cfa.

Ejemplos :

1) Hallar la ecuación de una cfa sabiendo que :

a) Tiene centro C(-2,3) y radio 1.
Empleando la ecuación (A) tenemos :

$\boxed{\mathcal{C}\ )(x+2)^2+(y-3)^2=1^2}$, que puede desarrollarse.

b) Tiene centro C(3,-1) y pasa por el punto P(-1,4)
Empleando la ecuación (B) :

$\mathcal{C}$) $x^2+y^2-6x+2y+F=0$, hallaremos F sabiendo que P$\in$ $\mathcal{C}$

$$(-1)^2+4^2-6(-1)+2.4+F=0 \Rightarrow F=-31 \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{C})\quad x^2+y^2-6x+2y-31=0}$$

c)Pasa por los puntos : (-1,-2), (2,-1) y (1,2)
Empleando la ecuación (C) :

$\mathcal{C}$) $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

(-1,-2) $\in$ $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ - D - 2E + F = -5 Resolviendo el sistema deducimos

(2,-1) $\in$ $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ 2D - E + F = -5 D=0, E=0, F= -5

(1,2) $\in$ $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ D + 2E + F = -5

Sustituyendo por los valores hallados :

$$\boxed{\mathcal{C}\ )\ x^2+y^2-5=0}$$

2) Determinar cada una de las ecuaciones siguientes corresponden a cfas., En caso afirmativo hallar centro y radio:

a) $x^2 + y^2 - x + 2y + 20 = 0$ $\quad D^2 + E^2 - 4F$ = -75 $\Rightarrow$ no es cfa.

b) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ Para usar © debemos dividir entre 2 :

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{1}{2} = 0 \qquad D^2 + E^2 - 4F = 15$$

Es entonces una cfa. de centro C(1, -3/2) y radio $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

<u>EJERCICIO 8:</u> Demostrar que la ecuación :

$(x - x_A).(x - x_B) + (y - y_A).(y - y_B)$ =0 corresponde a una **Circunferencia de diámetro AB con** $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$

<u>EJERCICIO 9:</u> Hallar la ecuación de una cfa. sabiendo:

a) Tiene centro (-3,-5) y radio 7
b) Tiene diámetro $\overleftrightarrow{AB}$ con A(2,3) y B(-4,5).
c) Tiene centro (7,-6) y pasa por el punto (2,2).
d) Tiene centro (2,-4) y es tangente al eje Oy
e) Tiene centro Ox y pasa por los puntos (2,2) y (6.-4)
f) Pasa por los puntos (-1,2), (1,1) y (2,3).

<u>EJERCICIO 10:</u>

Se consideran los puntos A(4,2), C(0,-7) y el cuadrilátero OABC.

a) Determinar las coordenadas de B sabiendo que la pendiente de AB es –4 y que D= AB $\cap$Ox es el punto medilo de AB.
b) Calcular área y perímetro del cuadrilátero OABC.
c) ¿Existe una cfa. que pase por O,A,B,y C?. En caso afirmativo hallar su ecuación.