05

SISTEMAS DE ECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES

En esta Unidad aprenderás a:

- Plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales: recordando los métodos de resolución clásicos.
- Discutir sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas estudiando sus respectivos coeficientes.
- Iniciar el estudio de sistemas lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas
- Aplicar el método de Gauss para su resolución.
- Aplicar dicho método para discutir sistemas lineales de tres ecuaciones.
- Resolver sistemas no lineales sencillos.

5.1 Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una **ecuación con dos incógnitas** permite describir cómo reacciona una de ellas si variamos la otra. Así, por ejemplo:

- La fórmula de la cinemática, *espacio* = *velocidad* · *tiempo* ($e = v \cdot t$), refleja distintas combinaciones de velocidades y tiempos que se pueden emplear en recorrer un espacio determinado. Por ejemplo, 200 km pueden hacerse a una velocidad de 100 km/h en 2 horas; o a 80 km/h, en 2,5 horas.
- Las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro sea de 50 m pueden variar desde uno estilizado de 5 x 20 m a otro cuadrado de 12,5 m de lado (Fig. 5.1.). Son distintas longitudes que verifican la ecuación $2x + 2y = 50$, llamando x a la base e y a la altura del rectángulo.
- Las ecuaciones con dos incógnitas de grado uno se llaman **lineales**. La forma reducida de esta ecuación lineal es $\boldsymbol{ax + by = c}$, siendo a, b los **coeficientes** y c el **término independiente**.

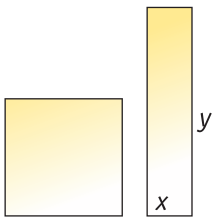


Fig. 5.1.

La **solución** de una ecuación con dos incógnitas es todo **par de valores** de las mismas que verifican la igualdad. En general, estas ecuaciones tienen infinitas soluciones que coinciden con los puntos de una recta. Así, por ejemplo, la ecuación $-2x + y = 1$ se cumple para los pares $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, ..., y para todos los puntos de la recta representada en la Figura 5.2.

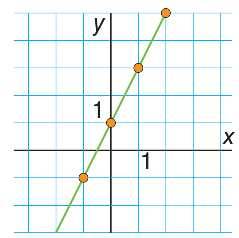


Fig. 5.2.

> **!**
>
> ***Importante***
>
> La fórmula $e = vt$ no es lineal en las variables v y t, pues su producto hace que el término $v \cdot t$ sea de grado 2.
>
> En cambio, $2x + 2y = 50$ sí es lineal.

Un par de ecuaciones lineales con dos incógnitas que se consideran simultáneamente forman un **sistema**. Su forma más simplificada sería:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- Una **solución** del sistema es toda pareja de valores que asignados a las incógnitas satisfacen al mismo tiempo las dos ecuaciones.

Por ejemplo, en el sistema $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ el par $x = -1$, $y = 1$ es solución, ya que $\begin{cases} -(-1) + 2 \cdot 1 = 3 \\ 2(-1) + 1 = -1 \end{cases}$

Sin embargo, el par $x = 1$, $y = 2$ no es solución, pues satisface la primera ecuación pero no la segunda.

> **!**
>
> ***Más datos...***
>
> Un sistema es equivalente a otro si ambos tienen las mismas soluciones.

A. Resolución de sistemas

Resolver un sistema es encontrar todas sus soluciones. Para ello, se ha de **transformar** el sistema original en otro equivalente que tenga, al menos, una ecuación con una sola incógnita, la cual se podrá despejar con las técnicas habituales. Las transformaciones que pueden hacerse en un sistema, de forma que no se alteren sus soluciones aunque sí la forma de las ecuaciones que lo componen, son:

(1) Transponer números o incógnitas de un miembro a otro.
(2) Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.
(3) Sumar o restar a una ecuación otra multiplicada previamente por un número.

Estas transformaciones se concretan en los tres métodos clásicos de resolución de sistemas: métodos de sustitución, de igualación y de reducción.

> **!**
>
> ***Más datos...***
>
> En (3), la ecuación obtenida se dice que es **combinación lineal** de las otras dos.

Método de sustitución

Consiste en despejar una cualquiera de las incógnitas en una de las ecuaciones y **sustituir** su valor en la otra.

Apliquemos el proceso al sistema: $\begin{cases} x+2y-3=0 \\ \dfrac{1}{2}x-3y=5 \end{cases}$

1. Despejamos x en la primera ecuación: $x=3-2y$.
2. Sustituimos este valor de x en la segunda: $\dfrac{1}{2}(3-2y)-3y=5$
3. Resolvemos esta ecuación:

$$\frac{1}{2}(3-2y)-3y=5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}-y-3y=5 \Leftrightarrow -4y=5-\frac{3}{2} \Leftrightarrow y=\frac{7}{2}:(-4)=-\frac{7}{8}$$

Con este valor de y, hallamos x: $x=3-2(-\frac{7}{8})=3+\frac{14}{8}=\frac{19}{4}$

La solución del sistema es: $x=\dfrac{19}{4}$; $y=-\dfrac{7}{8}$.

!

Más datos...

Si despejas la incógnita y, sustituyéndola en la segunda ecuación, puedes comprobar la obtención de una solución idéntica. La efectividad del método se basa en poder despejar una incógnita fácilmente.

Método de igualación

Este método consiste en despejar e igualar la misma incógnita en ambas ecuaciones. A continuación se resuelve la ecuación resultante.

En el sistema $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+8y=-2 \end{cases}$ vamos a despejar la incógnita x en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x=4+y \\ 2x=-2-8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+y \\ x=-1-4y \end{cases}$$

Igualamos los segundos miembros: $4+y=-1-4y \Leftrightarrow 5y=-5 \Leftrightarrow y=-1$

Como $x=4+y \Rightarrow x=3$.

La solución del sistema es $x=3$, $y=-1$.

Si se hubiera despejado la incógnita y en ambas ecuaciones, el resultado hubiese sido el mismo.

Método de reducción

Este método busca la eliminación de una incógnita en alguna de las ecuaciones. Para ello:

1. Se multiplican las ecuaciones por sendos números de modo que se consigan igualar, en valor absoluto, los coeficientes de una de las incógnitas.
2. Se suman o restan ambas ecuaciones para eliminar esa incógnita.

Por ejemplo, si en el sistema $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+8y=-2 \end{cases}$, a la segunda ecuación le restamos el doble de la primera ($E2-2E1$), queda:

$$\begin{cases} x-y=4 \\ \left[2x+8y=-2\right]-2\left[x-y=4\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ 10y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ y=-1 \end{cases}$$

cuya solución es ya inmediata, pues sustituyendo en $E1$: $x-(-1)=4 \Rightarrow x=3$.

Por tanto, la solución del sistema es $x=3$, $y=-1$.

!

Más datos...

Si a una ecuación se le suma o resta la otra multiplicada por un número, el sistema resultante es equivalente al primero.

B. Clasificación de sistemas

Los sistemas que tienen solución se llaman **compatibles**.

Si la solución es única se llaman **compatibles determinados**.

Si tienen infinitas soluciones se llaman **compatibles indeterminados**.

Si un sistema carece de soluciones se dice que es **incompatible**.

Por ejemplo, el sistema: $\begin{cases} 30x - 20y = 130 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\,(3x - 2y) = 10 \cdot 13 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

es equivalente, en realidad, a una sola ecuación con dos incógnitas que, como ya sabemos, tiene infinitas soluciones; en este caso: (3, −2), (1, −5), (5, 1)... Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Sin embargo, el sistema $\begin{cases} 14x - 40y = 0 \\ 7x - 20y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(7x - 20y) = 0 \\ 7x - 20y = 10 \end{cases}$ es incompatible, pues no se puede verificar que $7x - 20y$ sea a la vez igual a 0 y a 10.

Así pues, los sistemas lineales se pueden clasificar según las soluciones que tengan en:

SISTEMA LINEAL
- *COMPATIBLE* (con solución)
  - *DETERMINADO* (solución única)
  - *INDETERMINADO* (infinitas soluciones)
- *INCOMPATIBLE* (sin solución)

C. Interpretación geométrica de un sistema

Como ya hemos indicado, la ecuación lineal con dos incógnitas es la expresión analítica de una recta. Por tanto, un sistema de dos ecuaciones se puede interpretar como un par de rectas, cuya posición en el plano será resultado del tipo de sistema de que se trate.

Si en el sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ llamamos r y s a las rectas representadas por la primera y segunda ecuación, $r \equiv ax + by = c$ y $s \equiv a'x + b'y = c'$, entonces:

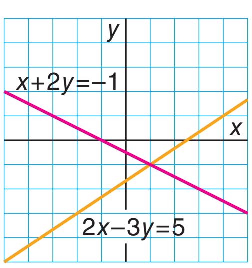
1. Si r y s se cortan en el punto $P = (x_0, y_0)$ el sistema será **compatible determinado** y su solución es $x = x_0$ e $y = y_0$.
2. Si r y s son rectas paralelas el sistema es **incompatible**.
3. Si r y s son dos rectas que se superponen, todos los puntos serán comunes y el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones. Es, pues, **indeterminado**.

Los pares de rectas asociados a los siguientes sistemas se representan más abajo.

!

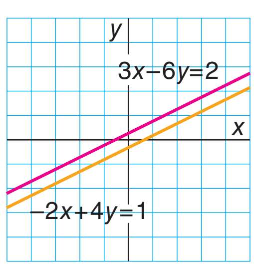
Más datos...

Este procedimiento puede utilizarse para discutir un sistema. Su empleo para resolverlo con suficiente precisión exige que se dibuje en papel cuadriculado para soluciones enteras o papel milimetrado si aquéllas fueran decimales.

a) 

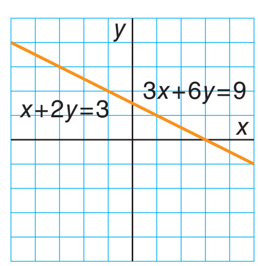
$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

rectas que se cortan

b) 

$\begin{cases} -2x + 4y = 1 \\ 3x - 6y = 2 \end{cases}$

rectas paralelas

c) 

$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$

rectas coincidentes

Fig. 5.3.

5.2 Discusión de un sistema de dos ecuaciones

Conocer de qué tipo es un sistema, sin llegar a resolverlo, se llama discutirlo. El interés de la discusión proviene de que en ocasiones nos interesará la estructura de las ecuaciones más que su solución en sí.

Supongamos el sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b\ y=c' \end{cases}$, y apliquemos el método de reducción para eliminar la incógnita x: multiplicamos la 1ª ecuación por a', la 2ª por a y restamos:

$$\begin{array}{ll} a'\,E1: & a'(ax+by)=a'\cdot c \\ \underline{a\ E2:} & \underline{a(a'x+b'y)=a\cdot c'} \\ a'E1-aE2: & (a'b-ab')y=a'c-ac' \end{array}$$

Si hacemos $m=a'b-ab'$ y $n=a'c-ac'$ el sistema primitivo es equivalente a $\begin{cases} ax+by=c \\ \quad my=n \end{cases}$

El estudio de la segunda ecuación nos da los posibles tipos de sistemas. En efecto si:

1. $\boldsymbol{m\neq 0}$. La segunda ecuación es $\boldsymbol{my=n}$.
   Entonces no hay ninguna dificultad para resolverlo, pues, despejando $y=\dfrac{n}{m}$.
   Este valor se lleva a la primera ecuación y se halla x.
   Así pues, si $m\neq 0$ la solución es única. El sistema es **compatible determinado**.

   Por ejemplo, el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ -x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ E2+E1 \end{array}\begin{cases} x+y=3 \\ 2y=2 \end{cases}$ es compatible determinado. Su solución es $x=2$ e $y=1$.

2. $\boldsymbol{m=0}$ y $\boldsymbol{n\neq 0}$. La segunda ecuación es $\boldsymbol{0y=n}$ que para cualquier valor de y nunca llegará a verificarse: el sistema no tiene solución y será **incompatible**.

   Por ejemplo, el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ E2+2E1 \end{array}\begin{cases} x+y=3 \\ 0=-3 \end{cases}$ es incompatible.

3. $\boldsymbol{m=0}$ y $\boldsymbol{n=0}$. La segunda ecuación es $\boldsymbol{0y=0}$, que admite todo valor posible de y como solución; luego el sistema sería **compatible indeterminado**.

   Por ejemplo, el sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ E2-2E1 \end{array}\begin{cases} x+y=3 \\ 0=0 \end{cases}$ es compatible indeterminado. Sus soluciones son todos los pares de números que cumplen que $x+y=3$. Por ejemplo, (2, 1), (4, −1) o (0, 3).

En conclusión:

1. Si $\boldsymbol{m\neq 0}$ (que equivale a $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$, ver margen) el sistema inicial es equivalente a: $\begin{cases} ax+by=c \\ \quad my=n \end{cases}$ y es **compatible determinado**.

2. Si $\boldsymbol{m=0}$ y $\boldsymbol{n\neq 0}$ (que equivale a $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$) el sistema inicial se transforma en $\begin{cases} ax+by=c \\ \quad 0\ y=n \end{cases}$ y es **incompatible**.

3. Por último, si $\boldsymbol{m=n=0}$ (o sea $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$), el sistema queda $\begin{cases} ax+by=c \\ \quad 0\ y=0 \end{cases}$, que es **compatible indeterminado**.

!

Más datos...

Como $m=a'b-ab'$: Si $m=0 \Rightarrow a'b=ab'$, luego $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$.

Si $m\neq 0$, entonces $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$.

Y si $n=a'c-ac'=0$, se tiene: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{c}{c'}$.

Luego, cuando $n\neq 0$, $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{c}{c'}$

- En el caso 3. todos los coeficientes son *proporcionales*.
- En 2, son proporcionales los coeficientes de la x y de la y pero no los términos independientes.

EJEMPLO 1

Estudia, sin llegar a resolver, de qué tipo es cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x+4y=1 \\ 3x-6y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+6y=9 \end{cases}$

Transformamos cada uno de los sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow E_2-2\cdot E_1 \begin{cases} x+2y=-1 \\ -7y=7 \end{cases}$

El sistema es compatible determinado, pues los coeficientes de x y de y no son proporcionales, $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-3}$: el sistema tiene solución única.

b) En este caso $\begin{cases} -2x+4y=1 \\ 3x-6y=2 \end{cases} \Leftrightarrow 3E_1+2E_2 \begin{cases} -2x+4y=1 \\ 0y=7 \end{cases}$

El sistema es incompatible $\left(\frac{-2}{3} = \frac{4}{-6} \neq \frac{1}{2}\right)$ como delata la ecuación imposible $0 \cdot y = 7$.

c) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+6y=9 \end{cases} \Leftrightarrow E_2-3E_1 \begin{cases} x+2y=3 \\ 0y=0 \end{cases}$

El sistema es compatible indeterminado (los coeficientes de ambas ecuaciones son proporcionales $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$), sólo queda una ecuación.

EJEMPLO 2

Discute, en función de los valores del parámetro a, el sistema: $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-ay=4 \end{cases}$.

Para discutirlo, hay que estudiar las relaciones entre los coeficientes y los términos independientes de ambas ecuaciones.

- Si $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{-a}$, que sucede cuando $a \neq -3$, el sistema será compatible determinado.
- Si $\frac{1}{3} = \frac{1}{-a} \neq \frac{1}{4}$, que sucede cuando $a = -3$, el sistema será incompatible.

Por tanto: si $a \neq -3$, el sistema tiene solución única.
Si $a = -3$, el sistema no tiene solución.

ACTIVIDADES

1> Discute, sin llegar a resolver, la compatibilidad de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x-2y=-1 \\ -2x+y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y=3 \\ -4x+8y=-12 \end{cases}$

R: a) Incompatible; b) Compatible determinado; c) Indeterminado.

2> Sea el sistema $\begin{cases} 4x+by=5 \\ -2x+y=4 \end{cases}$, calcula los valores que debe tomar b para que el sistema sea:

a) Compatible determinado. b) Indeterminado.

R: a) $b \neq -2$; b) Nunca.

5.3 Sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas

Resolución e interpretación geométrica

Estos sistemas no suelen presentarse en la práctica. Surgen de problemas con más datos de los necesarios. No obstante, los estudiamos porque nos ayudarán a reforzar las ideas anteriores.

La forma más simple de un sistema de este tipo es: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \\ a''x+b''y=c'' \end{cases}$.

Estos sistemas son **compatibles** (tienen solución) cuando la solución del sistema formado por cualquier par de ecuaciones verifica también la otra. Esto significa que una ecuación es combinación lineal de las otras dos.

En otro caso el sistema sería **incompatible**.

La posibilidad de un sistema con **infinitas soluciones**, indeterminado, sólo ocurriría cuando las tres ecuaciones coincidieran. Es decir, representasen la misma ecuación, aunque con apariencia diferente. Aclaramos la situación con dos ejemplos:

a) El sistema $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ x-\dfrac{1}{3}y=0 \\ 2x+\dfrac{4}{3}y=-3 \end{cases}$ lo resolvemos tomando las dos primeras ecuaciones

$\begin{cases} 3x+y=-3 \\ x-\dfrac{1}{3}y=0 \end{cases}$, cuya solución es: $x_0=-\dfrac{1}{2}$ e $y_0=-\dfrac{3}{2}$. Estos valores también satisfacen la tercera ecuación, pues $2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{4}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-3$.

Por tanto, el sistema es determinado y su solución son los valores anteriores (Fig. 5.4a.)

b) Sin embargo, el sistema $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+3y=2 \\ -2x+y=5 \end{cases}$ es incompatible, no tiene solución, ya que las ecuaciones primera y segunda $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+3y=2 \end{cases}$ nos dan la solución $x_0=\dfrac{1}{5}$, $y_0=\dfrac{3}{5}$, que no cumple la última ecuación. (Fig. 5.4b.)

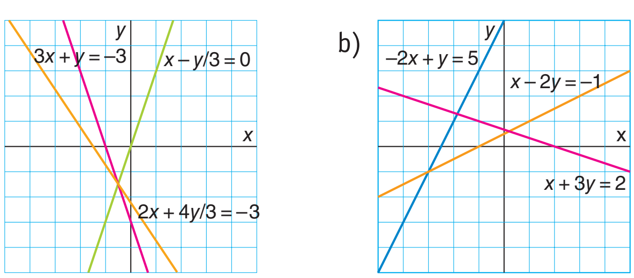
a)


Fig. 5.4.

!

Más datos...

El par (x_0, y_0) es solución del sistema si verifica simultáneamente las tres ecuaciones. Esto es:

$$\begin{cases} ax_0+by_0=c \\ a'x_0+b'y_0=c' \\ a''x_0+b''y_0=c'' \end{cases}.$$

5.4 Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

Con estos sistemas ampliamos en una dimensión más los problemas de dos ecuaciones y dos incógnitas. Ello nos permitirá resolver problemas con mayor información y complejidad. La forma estándar de estos sistemas es la siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Las incógnitas son x, y y z; los coeficientes, a_{ij}, y los términos independientes, b_i, son números reales.

- Una **solución** del sistema es cualquier terna de valores x_0, y_0 y z_0 que satisfacen simultáneamente las tres ecuaciones.
- **Resolver** un sistema es encontrar todas sus soluciones.

Para resolver estos sistemas podríamos emplear los métodos expuestos para los sistemas de dos ecuaciones pero, en general, resultarían demasiado laboriosos. No obstante, en todos los casos, para concluir el proceso hay que recurrir al método de sustitución que nos permite encontrar una solución a partir de las otras.

Método de sustitución

Este método consiste en despejar una incógnita en alguna de las ecuaciones y llevar su valor a las otras. Se obtiene así un sistema asociado al primero pero con una ecuación menos; esto es, de dos ecuaciones con dos incógnitas. Este segundo sistema se resuelve por el método que resulte más cómodo. La incógnita despejada inicialmente se halla por sustitución.

EJEMPLO 3

Resuelve por sustitución el sistema: $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x \quad\; - z = 1 \\ 3x - y - 2z = 3 \end{cases}$

R: Despejando z en la segunda ecuación, $z = 2x - 1$, y sustituyendo en las otras dos, el sistema dado es equivalente

a $\begin{cases} x + 2y + 2x - 1 = 0 \\ 3x - y - 2(2x - 1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$.

La solución de este sistema es $x = 3$ e $y = -4$. Por tanto, el valor de $z = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Por tanto, la solución del sistema inicial es la terna $x = 3$, $y = -4$ y $z = 5$. (Comprueba que verifica las tres ecuaciones.)

ACTIVIDADES

3> Resuelve por sustitución los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x + 2y + z = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - z = 1 \\ 5y + z = 0 \end{cases}$ **R:** a) 2, 1, 0; b) 3, –1, 5.

5.5 Método de Gauss

El método de Gauss es una generalización del método de reducción ya conocido. Consiste en transformar el sistema inicial, $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ [1]

en otro equivalente a él, de la forma: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ \quad\quad a''_{33}z = b''_3 \end{cases}$ [2]

Por tanto, se trata de eliminar la incógnita x de la ecuación segunda ($E2$) y las incógnitas x e y de la tercera ecuación ($E3$). Estos sistemas se llaman **escalonados o triangulares**, y se resuelven de abajo a arriba. Esto es, siguiendo el proceso: despejar z en $E3$; sustituir su valor en $E2$ y despejar y en ella; sustituir z e y en $E1$ y despejar x.

EJEMPLO 4

Resuelve, aplicando el método de Gauss, el sistema: $\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 2x - 3y - 2z = 1 \\ -x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$.

El proceso es el siguiente:

1. Se elimina la incógnita x en las ecuaciones segunda y tercera, sumando a éstas la primera ecuación multiplicada por -2 y 1, respectivamente, quedando el sistema:

$$\begin{matrix} \\ E2 - 2E1 \\ E3 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ \quad -11y - 8z = 3. \\ \quad\quad 6y + 7z = 1 \end{cases}$$

2. Suprimimos la incógnita y de la tercera ecuación sumando a la misma, previamente multiplicada por 11, la segunda multiplicada por 6:

$$\begin{matrix} \\ \\ 11E3 + 6E2 \end{matrix} \begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ \quad -11y - 8z = 3. \\ \quad\quad 29z = 29 \end{cases}$$

3. Se resuelve el sistema escalonado empezando por la tercera ecuación: $29z = 29 \Rightarrow z = \frac{29}{29} = 1$. Ahora, en la segunda ecuación:

$$-11y - 8 \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow -11y = 11 \Leftrightarrow y = -1$$

Y, por último, en la primera: $x + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow x = -1 + 1 = 0$.
La solución del sistema es: $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$.

!

Más datos...

Para pasar de [1] a [2], puede procederse así:

(1) Debe procurarse que el coeficiente $a_{11} = \pm 1$, lo que puede conseguirse alterando la colocación de incógnitas o ecuaciones, o bien dividiendo la primera ecuación por ese a_{11}.

(2) Se elimina la incógnita x en las ecuaciones $E2$ y $E3$, realizando las transformaciones:

$E2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}E1$ y $E3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}E1$, respectivamente.

Con esto, el sistema [1] es equivalente al sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ \quad a'_{32}y + a'_{33}z = b'_3 \end{cases}$$

(3) Suprimimos ahora la incógnita y de la ecuación $E3$, para lo que hacemos la transformación $E3 - \frac{a'_{31}}{a'_{22}}E2$, obteniéndose el sistema escalonado

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ \quad\quad a'_{33}z = b''_3 \end{cases} \quad [2]$$

ACTIVIDADES

4> Aplicando el método de Gauss, resuelve:

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 55 \\ x + 2y + z = 45 \\ x + y + 2z = 40 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 13x + 12y + 8z = 430 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$

R: a) 20, 10, 5. b) 10, 5, 30.

5.6 Discusión de un sistema de tres ecuaciones

Discutir un sistema consiste en explicar razonadamente sus posibilidades de solución dependiendo del valor de sus coeficientes y términos independientes. En los sistemas escalonados la discusión se hace a partir de la ecuación más simple, que supondremos que es la última. Así, estudiando la tercera ecuación del sistema [2], $a''_{33}z = b''_3$, se determinan las posibilidades de solución del sistema inicial, verificándose:

- Si $a''_{33} \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado, pues siempre se puede encontrar una solución única empezando a resolver el sistema por la tercera ecuación.
- Si $a''_{33} = 0$ y $b''_3 = 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, pues la ecuación $E3$ desaparece (queda $0z = 0$, que se cumple para cualquier valor de z) resultando así un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, pues el sistema [2] queda:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ \quad 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 - a_{13}z \\ \quad a'_{22}y = b_2 - a'_{23}z \end{cases}$$

Para resolver este sistema hemos de suponer la incógnita z conocida y hallar las otras en función de ella. (En la práctica, suele hacerse $z = k$.)

- Si $a''_{33} = 0$ y $b''_3 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es incompatible, pues la ecuación $E3$ queda $0z \neq 0$, que evidentemente es absurda, pues cualquier valor de z multiplicado por 0 debe dar 0.

EJEMPLO 5

Discute y halla la solución del sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 3y - z = -2 \\ 2x - y + 4z = 6 \end{cases}$.

R: Utilizando el método de Gauss se tiene:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 3y - z = -2 & E2 + E1 \\ 2x - y + 4z = 6 & E3 - 2E1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5y + 2z = 2 \\ -5y - 2z = -2 & E3 + E2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5y + 2z = 2 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Como la ecuación $E3$ se ha anulado el sistema es indeterminado, equivalente a:

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5y + 2z = 2 \end{cases}$ o bien $\begin{cases} x + 2y = 4 - 3z \\ 5y = 2 - 2z \end{cases}$. Despejando y en $E2$, resulta $y = \dfrac{2 - 2z}{5}$.

Sustituyendo en $E1$: $x + 2\dfrac{2 - 2z}{5} = 4 - 3z \Rightarrow x = 4 - \dfrac{4 - 4z}{5} - 3z \Rightarrow x = \dfrac{16 - 11z}{5}$

Haciendo $z = k$, la solución es: $x = \dfrac{16 - 11k}{5}$; $y = \dfrac{2 - 2k}{5}$; $z = k$.

ACTIVIDADES

5> Discute y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ -2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = -1 \\ 3y - z = 3 \end{cases}$

R: a) 3, 1, 5; b) $x = \dfrac{4 - k}{5}$, $y = -\dfrac{7k + 2}{5}$, $z = k$; c) Incompatible.

A. Sistemas con un parámetro

Un sistema se discute cuando éste contiene algún coeficiente no determinado (parámetro). Entonces, antes de resolverlo hemos de especificar su carácter en función de los diferentes valores del parámetro. El criterio para su clasificación es el indicado anteriormente; esto es, el estudio de la tercera ecuación $a''_{33}z = b''_3$.

Por ejemplo, el sistema $\left\{\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ x+y+z=4 \\ 2x+2y+mz=5 \end{array}\right.$ que es equivalente a $\begin{array}{r} \\ E2-E1 \\ E3-2E1 \end{array}\left\{\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2z=3 \\ (m+2)z=3 \end{array}\right.$,

y, a su vez equivalente, a $\begin{array}{r} \\ \\ E3-E2 \end{array}\left\{\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2z=3 \\ mz=0 \end{array}\right.$. Este último sistema sólo tendrá solución si $m=0$, pues en caso contrario la segunda y tercera ecuación serían incompatibles. (Fíjate que si suponemos que $m=5$, la $E3$ quedaría $5z=0 \;\Rightarrow\; z=0$; que sería contradictorio con $E2$, $2z=3 \;\Rightarrow\; z=\frac{3}{2}$.)

EJEMPLO 6

Discute el sistema $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=m+1 \\ x+3z=0 \\ x+y+z=m \end{array}\right.$ según los valores de m y resuélvelo cuando sea posible.

Aplicando el método de Gauss se tiene:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+3y=m+1 \\ x+3z=0 \\ x+y+z=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{r} E2 \\ E1 \\ \end{array}\left\{\begin{array}{r} x+3z=0 \\ 2x+3y=m+1 \\ x+y+z=m \end{array}\right. \begin{array}{r} \Leftrightarrow \\ E2-2E1 \\ E3-E1 \end{array}\left\{\begin{array}{r} x+3z=0 \\ 3y-6z=m+1 \\ y-2z=m \end{array}\right. \begin{array}{r} \\ \Leftrightarrow \\ 3E3-E2 \end{array}\left\{\begin{array}{r} x+3z=0 \\ 3y-6z=m+1 \\ 0=2m-1 \end{array}\right.$$

Para que $E3$ tenga sentido es preciso que $0=2m-1 \;\Rightarrow\; m=\frac{1}{2}$. En caso contrario, el sistema no tendría sentido. Por tanto:

Si $m \neq \frac{1}{2}$ el sistema es incompatible.

Si $m=\frac{1}{2}$, la tercera ecuación queda: $0=0$. En este caso, como se pierde una ecuación, el sistema será compatible indeterminado. Luego, el sistema inicial

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+3y=m+1 \\ x+3z=0 \\ x+y+z=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+3z=0 \\ 3y-6z=\frac{1}{2}+1 \\ 0=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+3z=0 \\ 3y-6z=\frac{3}{2} \end{array}\right. \begin{array}{r} \Leftrightarrow \\ E2/3 \end{array}\left\{\begin{array}{r} x+3z=0 \\ y-2z=\frac{1}{2} \end{array}\right. \text{(haciendo } z=k) \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x=-3k \\ y=\frac{1}{2}+2k \\ z=k \end{array}\right.$$

ACTIVIDADES

6> Discute según los valores de m, y resuélvelos cuando sea posible, los siguientes sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+2y+mz=5 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+2y=m \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{r} x+y=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x+2y+mz=1 \end{array}\right.$

R: a) Si $m \neq 0$: $x=1$, $y=1$, $z=0$. Si $m=0$: $x=1+2k$, $y=1-3k$, $z=k$.
b) Si $m \neq 5$: incompatible. Si $m=5$: $x=1+2k$, $y=1-3k$, $z=k$.
c) Si $m=-1$: incompatible. Si $m \neq -1$: $x=\frac{1}{(m+1)}$, $y=-\frac{1}{(m+1)}$, $z=\frac{1}{(m+1)}$.

5.7 Sistemas homogéneos

Son sistemas de la forma $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$; esto es, todos los términos independientes son nulos.

- Estos sistemas siempre son compatibles, pues seguro que admiten la solución $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ que, por ser obvia, se califica como solución **trivial**.
- Cuando se anula alguna ecuación, el sistema es compatible indeterminado. Por tanto, tendrá infinitas soluciones.

EJEMPLO 7

Resuelve los sistemas homogéneos:

$$\text{a)} \begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \text{c)} \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x + y - mz = 0 \end{cases}$$

R: Evidentemente, los dos sistemas tienen la solución $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Veamos si tienen alguna más.

a) Operamos por Gauss:

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \\ 2x + z = 0 \quad E3 + 2E1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \\ 6y - z = 0 \quad E3 - 3E2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \\ 8z = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es $z = 0$, $y = 0$ y $x = 0$.

b) Realizando transformaciones elementales se tiene:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \quad E3 + E1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \quad E3 - E2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Este último sistema es indeterminado: $\begin{cases} 2x - y = -3z \\ y = -3z \end{cases}$. Sus soluciones son: $\begin{cases} x = -3k \\ y = -3k \\ z = k \end{cases}$

c) Sus posibilidades de solución dependerán del valor que tome m:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x + y - mz = 0 \quad E3 - E1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2y - (m+3)z = 0 \quad E3 - 2E2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \\ -(m+1)z = 0 \end{cases}$$

Este último sistema es indeterminado cuando $m = -1$. En este caso sus soluciones son: $x = -k$, $y = k$, $z = k$.

ACTIVIDADES

7> Halla la solución de los siguientes sistemas homogéneos:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 4x + y - 3z = 0 \\ 6x + 5z = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \qquad \text{c)} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \\ 3x + my + z = 0 \end{cases}$$

R: a) $x = y = z = 0$ b) $x = -k$, $y = \dfrac{-2k}{3}$, $z = k$ c) Si $m \neq -5$: $x = y = z = 0$. Si $m = -5$: $x = -2k$, $y = -k$, $z = k$.

5.8 Sistemas no lineales

Un sistema en el que alguna de las ecuaciones que lo forman no es lineal ya adquiere la condición de **no lineal**. Para resolverlo, suele emplearse el método de sustitución; aunque el de igualación también puede ser muy efectivo.

Normalmente, se utiliza la traducción gráfica de estos sistemas para interpretar los resultados de forma esclarecedora. Las ecuaciones que entran a formar parte de un sistema no lineal son de cualquier tipo y grado.

Por ejemplo, para resolver el sistema $\begin{cases} 2x+2=y-2 \\ y-2=(x+1)^2 \end{cases}$, igualamos el primer miembro de la primera ecuación con el segundo de la otra y obtenemos $2x+2=(x+1)^2$, que sólo depende de la incógnita x:

$$2x+2=x^2+2x+1 \;\Rightarrow\; x^2=1 \;\Rightarrow\; x=\pm 1$$

Sustituyendo estos valores en la primera ecuación, $y=2x+4$, se obtiene: para $x=1$, $y=6$; y para $x=-1$, $y=2$.

Observa que sustituyendo la y despejada en la segunda ecuación se verifica igualmente.

Gráficamente se ve el papel de los puntos solución (1, 6) y (−1, 2).

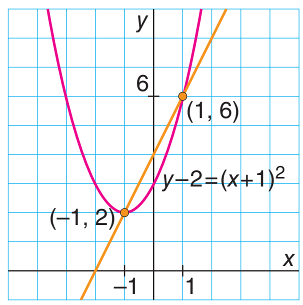


Fig. 5.5.

EJEMPLO 8

Resuelve el sistema: $\begin{cases} y=x^2+6 \\ x^2+21=2y \end{cases}$.

Sustituimos la y despejada de la primera ecuación en la segunda:

$x^2+21=2(x^2+6) \;\Leftrightarrow\; x^2+21=2x^2+12 \;\Leftrightarrow\; x^2=9 \;\Leftrightarrow\; x=\pm 3$

Para ambos valores de x, se tiene que: $y=9+6=15$.

Las soluciones son: $(-3, 15)$ y $(3, 15)$

La interpretación gráfica se da en la Figura 5.6.

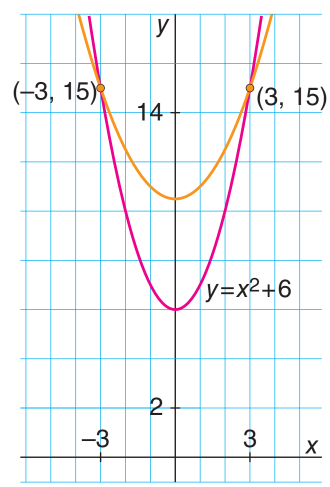


Fig. 5.6.

ACTIVIDADES

8> Halla la solución de: $\begin{cases} y^2+x^2=160 \\ x-y=8 \end{cases}$.

R: $x=24$, $y=-12$; $x=12$, $y=4$.

5.9 Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

Un **sistema de inecuaciones lineales** es de la forma: $\begin{cases} ax+b\geq 0 \\ a'x+b'\geq 0 \end{cases}$

La solución de estos sistemas se obtiene resolviendo por separado cada una de las inecuaciones que lo componen y hallando los valores comunes a las soluciones encontradas.

El número de inecuaciones que pueden presentarse es cualquier número mayor a o igual que dos.

Así, por ejemplo, para hallar el conjunto solución del sistema $\begin{cases} x+4<1 \\ 1-2x\geq 3 \end{cases}$

- Resolvemos la primera inecuación:
  $x+4<1 \Leftrightarrow x<1-4 \Leftrightarrow x<-3 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3)$, o sea $S_1=(-\infty,-3)$
- La segunda nos da: $1-2x\geq 3 \Leftrightarrow 1-3\geq 2x \Leftrightarrow -2\geq 2x \Leftrightarrow x\leq -1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]$ es decir $S_2=(-\infty,-1]$
  Por tanto, la solución de ambas inecuaciones es
  $$S=(-\infty,-3)\cap(-\infty,-1]=(-\infty,-3)$$
  Gráficamente:

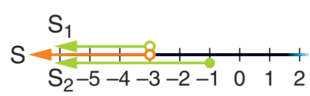


Fig. 5.7.

EJEMPLO 9

Resuelve y representa gráficamente las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 2x+1>-1 \\ \dfrac{2-x}{2}\geq -1 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

- La inecuación $2x+1>-1 \Leftrightarrow 2x>-2 \Leftrightarrow x>-1$, tiene como solución el conjunto $S_1=(-1,+\infty)$
- La inecuación $\dfrac{2-x}{2}\geq -1 \Leftrightarrow 2-x\geq -2 \Leftrightarrow x\leq 4$, o $S_2=(-\infty,4]$
- La inecuación $x\geq 0$ son los números reales positivos $S_3=[0,+\infty)$.
  Entonces, la solución del sistema es: $S=S_1\cap S_2\cap S_3=[0,4]$.

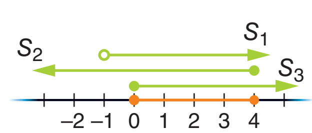


Fig. 5.8.

ACTIVIDADES

9> Halla el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} 2x+3<5 \\ 5-x<7 \end{cases}$.

R: a) $(-2,1)$.

5.10 Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Son sistemas de la forma $\begin{cases} a_1x + b_1y < c_1 \\ a_2x + b_2y < c_2 \end{cases}$

El signo $<$ pueden ser sustituido por $>$, $\leq$ o $\geq$.

Un punto (x_0, y_0) es solución del sistema si lo es de cada una de las inecuaciones.

El **conjunto de soluciones** viene dado por la región del plano común a las regiones solución de cada una de las inecuaciones. Por tanto, se debe resolver cada inecuación del sistema por separado y a continuación hallar la región del plano común a todas esas inecuaciones.

EJEMPLO 10

Halla la solución gráfica del sistema

$$\begin{cases} 2x + y > 4 \\ x - 2y < 8 \end{cases}$$

De los puntos $P(1, 2)$, $Q(4, 1)$, $R(6, 2)$ y $S(2, -4)$ indica los que sean solución.

Para hallar el conjunto de soluciones de $2x + y > 4$, representamos la recta $2x + y = 4$, la cual tiene a $(0, 4)$ y $(2, 0)$ como puntos.
El conjunto de soluciones de $2x + y > 4$ es el semiplano a la derecha de la recta.
Para la segunda inecuación, $x - 2y < 8$, representamos $x - 2y = 8$, que tiene por puntos $(0, -4)$ y $(8, 0)$.
El conjunto de soluciones de $x - 2y < 8$ es el semiplano superior.
La solución del sistema es la porción de plano común a los semiplanos indicados.
A esa región pertenecen los puntos Q y R dados.

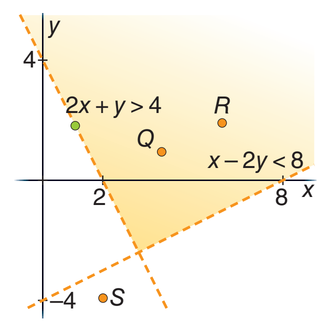


Fig. 5.9.

Aplicaciones geométricas

Hemos visto que la solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es una región del plano limitada por rectas. En sentido inverso, cualquier región del plano con bordes rectilíneos puede expresarse mediante inecuaciones lineales con dos variables.
Por ejemplo, los puntos del plano pertenecientes al primer cuadrante se caracterizan porque sus coordenadas son positivas. Esto es, (x, y) es un punto del primer cuadrante si $x > 0$ e $y > 0$. Por tanto, el primer cuadrante queda descrito como la solución del sistema: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.
Análogamente, los puntos del rectángulo coloreado viene descrito algebraicamente por el sistema: $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$.
Por último, el semiplano situado por debajo de la bisectriz del segundo cuadrante (cuya ecuación es $y = -x \Leftrightarrow x + y = 0$) viene dado por la inecuación $x + y < 0$.

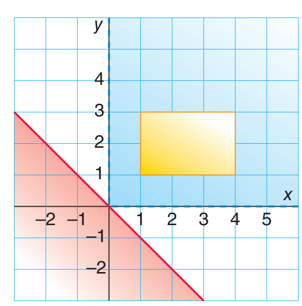


Fig. 5.10.

ACTIVIDADES

10> Halla la solución gráfica del sistema $\begin{cases} 2x - y > 1 \\ 5x + 10y \leq 30 \end{cases}$

Problemas resueltos

Tipo I. Sistemas lineales con dos incógnitas

1> Dado el sistema $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}+y=2 \\ 1-\dfrac{1+x}{2}=y-1 \end{cases}$, resuélvelo por reducción y gráficamente.

R: Quitamos denominadores y ordenamos:

$$\begin{cases} x-1+4y=8 \\ 2-1-x=2y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y=9 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

Restamos a la primera ecuación la segunda, y queda:

$$\begin{cases} 2y=6 \\ x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

con lo que $x=3-6=-3$.
La solución es $x=-3$, $y=3$.
Para resolverlo gráficamente representamos las rectas correspondientes a las ecuaciones.
Dos puntos de la recta $x+4y=9$ son $A(1,2)$ y $B(5,1)$.
De la recta $x+2y=3$ son los puntos $P(1,1)$ y $Q(3,0)$.
Ambas rectas se cortan en el punto $(-3,3)$, que es la solución.

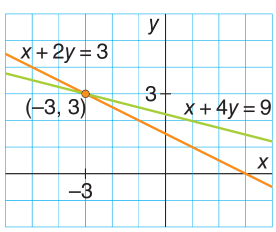


Fig. 5.11.

2> Encuentra el valor de a para que el sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{3}+y=4 \\ 2x-2y=3 \\ ax+\dfrac{1}{4}y=-1 \end{cases}$$ sea compatible.

R: Resolvemos por sustitución el sistema formado por las dos primeras ecuaciones, despejando la incógnita x en la primera y sustituyendo en la segunda:

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{3}+y=4 \\ 2x-2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-12 \\ 2(3y-12)-2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-12=3\dfrac{27}{4}-12=\dfrac{33}{4} \\ 4y=27 \Rightarrow y=\dfrac{27}{4} \end{cases}$$

Para que el sistema tenga solución, estos valores deben cumplir la tercera ecuación.

$$a\frac{33}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{4}=-1 \Leftrightarrow \frac{33}{4}a=-1-\frac{27}{16}=-\frac{43}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{-43}{16}:\frac{33}{4}=-\frac{43}{132}$$

Tipo II. Sistemas lineales con tres incógnitas

3> Halla la solución del sistema $\begin{cases} x-2y+z=8 \\ 2x-y-2z=3 \\ -x+z=0 \end{cases}$

R: Lo resolvemos por el método de Gauss. Para ello:

(1) Eliminamos la incógnita x en la segunda y tercera ecuación, sumando la primera a estas dos, en el primer caso, multiplicada previamente por -2 y resulta:

$$\begin{array}{r} \\ E2-2E1 \\ E3+E1 \end{array}\begin{cases} x-2y+z=8 \\ 3y-4z=-13 \\ -2y+2z=8 \end{cases}$$

(2) En el sistema obtenido hemos de suprimir una incógnita entre la segunda y tercera ecuación, para lo que sumamos a esta última multiplicada por 3, la segunda por 2, quedando:

$$\begin{array}{r} \\ \\ 3E3+2E2 \end{array}\begin{cases} x-2y+z=8 \\ 3y-4z=-13 \\ -2z=-2 \end{cases}$$

(3) De la tercera ecuación se deduce $z=1$; con este valor de z en la segunda ecuación queda:
$E2$: $3y-4\cdot1=-13 \Rightarrow 3y=-9 \Rightarrow y=-3$
Y sustituyendo ambos valores en la primera ecuación:
$E1$: $x-2\cdot(-3)+1=8 \Rightarrow x=1$
La solución del sistema es: $x=1$, $y=-3$, $z=1$.

4> Discute y resuelve según los diferentes valores de a el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ x+y+2z=a \\ 3x-3y+az=a \end{cases}$$

R: Para discutirlo aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ x+y+2z=a \\ 3x-3y+az=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ E2+E1 \\ E3+3E1 \end{array}\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 3y+z=a \\ 3y+(a-3)z=a \end{cases} \Leftrightarrow$$

Problemas resueltos

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ E3-E2 \end{array}\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 3y+z=a \\ (a-4)z=0 \end{cases}$$

Observando la tercera ecuación se tiene:
Si $a \neq 4$, $E3$ es $(a-4)z=0$ con $a-4 \neq 0$; luego, el sistema tiene solución única, siendo esta:

$z=0,\ y=\dfrac{a}{3},\ x=\dfrac{2a}{3}$

Si $a=4$, $E3$ queda $0z=0$; luego, el sistema es compatible indeterminado. En este caso el sistema, que resulta homogéneo, queda:

$$\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-z \\ z=-3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5t \\ y=t \\ z=-3t \end{cases}$$

Dos de esas soluciones son: $(0,0,0)$ y $(-5,-1,3)$.

5> PAU Considera el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de a.
b) Resuelve el sistema para $a=-1$.

R: a) Aplicando el método de Gauss se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} & ax+y+z=1 \\ E2-E1: & (1-a)x+(a-1)y=a-1 \\ E3-aE1: & (1-a^2)x+(1-a)y=a^2-a \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} & ax+y+z=1 \\ & (1-a)x+(a-1)y=a-1 \\ E3+E2: & (2-a-a^2)x \qquad =a^2-1 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ (1-a)x+(a-1)y=a-1 \\ -(a-1)(a+2)x \qquad =(a-1)(a+1) \end{array}\right\}$$

A partir de $E3$ se deduce:
Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, el coeficiente de la incógnita x es distinto de 0 y, en consecuencia, el sistema será compatible determinado.
Si $a=1$, la ecuación queda $0=0$. En este caso el sistema será compatible indeterminado. (Además, puedes observar que las tres ecuaciones son idénticas.)
Si $a=-2$, la $E3$ queda $0x=3$: el sistema será incompatible.

b) Para $a=-1$, el sistema es

$$\begin{cases} -x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ E2+E1 \\ E3+E1 \end{array}\begin{cases} -x+y+z=1 \\ 2z=0 \\ 2y=2 \end{cases}$$

cuya solución es: $x=0$; $y=1$; $z=0$.

Tipo III. Sistemas no lineales

6> Resuelve el sistema $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2 \end{cases}$ y representa gráficamente las soluciones.

R: Lo resolvemos por igualación: $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}=x^2$

$\Rightarrow x=x^4 \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow x=0,$ $x=1$.
Para $x=0$, $y=0$; para $x=1$, $y=1$. O sea, los puntos solución son (0, 0) y (1, 1).

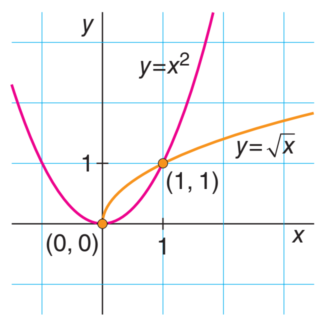


Fig. 5.12.

7> Resuelve: $\begin{cases} 2x+y=3 \\ xy-y^2=0 \end{cases}$

R: Despejamos y en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\begin{cases} y=3-2x \\ x(3-2x)-(3-2x)^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=3-2x \\ 3x-2x^2-(9+4x^2-12x)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=3-2x \\ 2x^2-5x+3=0 \end{cases}$$

La segunda ecuación, $2x^2-5x+3=0$, nos da como soluciones $x_1=1$ y $x_2=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$, correspondiendo para la incógnita y:

$$y_1=3-2\cdot 1=1;\ y_2=3-2\cdot\frac{3}{2}=0$$

Problemas resueltos

Tipo IV. Aplicaciones y problemas de sistemas

8> Se mezclan dos tipos de pipas de girasol, de 6,6 y 8,7 €/kg, respectivamente, obteniéndose 200 kg. Al secarse pierden un 12 % de su peso, vendiéndose el conjunto a 9,6 €/kg. ¿Qué cantidad de cada clase de pipas se tenía en un principio si el valor de la venta ha sido el mismo?

R: Sean x e y los kilos originarios de cada tipo de pipas.

Nos dicen que $x+y=200$.
Además, al perderse un $12\,\%=0{,}12$ de peso, nos quedará 0,88 por cada kilogramo, en total $200\cdot 0{,}88=176$ kg.
El valor de esas pipas es: $176\cdot 9{,}6=1689{,}6$ €.
El valor inicial era $6{,}6x+8{,}7y$ €.
Como son iguales: $6{,}6x+8{,}7y=1\,689{,}6$ €.
Se obtiene el sistema siguiente, que resolveremos por sustitución:

$$\begin{cases} x+y=200 \\ 6{,}6x+8{,}7y=1689{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ 6{,}6x+8{,}7y=1689{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ 6{,}6x+8{,}7(200-x)=1689{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ 6{,}6x-8{,}7x=1689{,}6-1740 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ -2{,}1x=-50{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ x=\dfrac{50{,}4}{2{,}1}=24 \end{cases}$$

Se mezclaron, entonces, 24 kg de un tipo e $y=200-24=176$ kg del otro tipo de pipas.

9> La suma de las dos cifras de un número es 9. Si a ese número le restamos 45, el que obtenemos es igual al número que resulta al cambiar de orden los dígitos del original. ¿Cuál es ese número?

R: En nuestro sistema decimal, el número formado por los dígitos *abc* simboliza el valor $100\cdot a+10\cdot b+c$. Es decir, cada cifra se multiplica por una potencia de 10 con exponente de una unidad inferior al lugar que ocupa, contado de derecha a izquierda:
Unidad, 10^0; decenas, 10^1; centenas, 10^2; millares, 10^3; etcétera.
Supongamos que el número pedido es xy. Entonces, $xy=10x+y$.
Si cambiamos el orden de las cifras se obtiene el número yx, cuyo valor es $yx=10y+x$.
Se tienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=9 \\ 10x+y-45=10y+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ 9x-9y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ x-y=5 \end{cases}$$

Por el método de reducción, si sumamos ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=9 \\ 2x=14 \end{cases} \Rightarrow x=7 \text{ e } y=2$$

El número inicial es 72.

10> A 120 alumnos de Bachillerato se les subvenciona una excursión con destino a las comunidades de Andalucía, Galicia y País Vasco, con un total de 8 922 €. Se asignan 60 € a cada alumno con destino a Andalucía, 72 € a cada uno que vaya al País Vasco y 90 € a los que se dirigen a Galicia. Además, el total de alumnos que van a las dos primeras comunidades citadas excede en 50 a los que van a Galicia. Halla el número de alumnos que visita cada comunidad.

R: Designemos por x, y, z el número de alumnos con destino Andalucía, País Vasco y Galicia, respectivamente. De acuerdo con el enunciado, se tiene:
$x+y+z=120$, pues son 120 el total de excursionistas, $60x+72y+90z=8\,922$, según la aportación recibida y $x+y=z+50$, al ir a Andalucía y al País Vasco 50 alumnos más que los de destino a Galicia.

$$\begin{cases} x+y+z=120 \\ 60x+72y+90z=8\,922 \\ x+y-z=50 \end{cases}$$

Aplicamos Gauss:

(1) Sumamos a la segunda ecuación la primera multiplicada por -60 ($E2-60E1$), y a la tercera le restamos la primera ($E3-E1$):

$$\begin{array}{r} \\ E2-60E1 \\ E3-E1 \end{array} \begin{cases} x+y+z=120 \\ 12y+30z=1\,722 \\ -2z=-70 \end{cases}$$

(2) El sistema obtenido ya es escalonado, por lo que podemos hallar las incógnitas sin realizar más manipulaciones.

(3) En la tercera ecuación $z=\dfrac{-70}{-2}=35$ alumnos; de la segunda: $12y+30\cdot 35=1\,722 \Rightarrow 12y=672 \Rightarrow$ $\Rightarrow y=56$ alumnos.
Y la primera nos proporciona $x=120-56+35=$ $=29$ alumnos.

Por tanto, se distribuyen en los diferentes destinos: 29 alumnos a Andalucía, 56 alumnos al País Vasco y 35 alumnos a Galicia.

Problemas propuestos

Tipo I. Sistemas lineales con dos incógnitas

1> Halla tres pares de soluciones de cada una de las ecuaciones:

a) $\frac{1}{2}(x-1)+2y=-3$ b) $\frac{x+2}{-2}+\frac{y}{4}=-1$

c) $1-\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=2$

R: a) 0, −5; 1, −9; −1, −1 b) 0, 0; 1, 2; −1, −2
c) 3, 8; −3, 0; 6, 12

2> Resuelve por igualación:

a) $\begin{cases} x+2y=-2 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x+y+1}{2}-y=y+1 \\ \frac{x}{2}-y=1 \end{cases}$

R: a) $\frac{8}{7}, \frac{-11}{7}$ b) 4, 1

3> Resuelve por sustitución:

a) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 6x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}=-y+1 \\ \frac{x-y}{2}=1-x \end{cases}$

R: a) $\frac{1}{16}, \frac{-5}{8}$ b) $\frac{4}{5}, \frac{2}{5}$

4> Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3 \\ x-\frac{y}{3}=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x+1}{2}+\frac{y-1}{3}=0 \\ \frac{x+y-2}{3}=1 \end{cases}$

R: a) $\frac{4}{3}$, 7 b) −11, 16

5> Resuelve gráficamente:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-2 \\ 0,2x+0,5y=0,1 \end{cases}$

6> Halla el valor de los parámetros a y b en

$\begin{cases} \frac{5}{2}x-ay=-3 \\ -\frac{1}{3}x+ay=b \end{cases}$ para que $x=2$, $y=3$ sea solución del sistema.

R: $\frac{8}{3}$ y $\frac{22}{3}$

7> Añade a la ecuación $6x-2y=-3$ otra ecuación, de forma que resulte un sistema:
a) Determinado. b) Indeterminado. c) Incompatible.

8> Discute y resuelve (si son compatibles) los dos sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ -2x+y=-6 \\ -6x+3y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=20 \\ 3x+4y=-3 \end{cases}$

R: a) Incompatible. b) $x=7$, $y=-6$.

9> Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ \frac{x}{2}-2y=3 \\ \frac{3}{2}x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+2y=\frac{1}{2} \\ 2x+\frac{y}{3}=-1 \\ x-2y=-\frac{1}{4} \end{cases}$

R: a) 2, −1; b) Incompatible.

10> Halla el valor del parámetro m para que los siguientes sistemas sean compatibles.

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=0 \\ mx+3y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=4 \\ x+my=2 \end{cases}$

R: a) $m=-1$ b) $m=-\frac{1}{2}$

Tipo II. Sistemas lineales con tres incógnitas

11> Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$

R: 1, 1, −1.

12> Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 4x+2y-3z=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2z=-1 \\ -x+3y+z=0 \\ y-3z=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-4y+\frac{z}{2}=1 \\ \frac{x}{2}-z=3 \\ 2y-z=11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}+z=2 \\ 2x+y-\frac{z+1}{2}=0 \\ \frac{x+2y}{4}-z=3 \end{cases}$

R: a) 2, 0, −1 b) $\frac{5}{3}$, 1, $-\frac{4}{3}$

c) $\frac{74}{5}, \frac{77}{10}, \frac{22}{5}$ d) −8, $\frac{56}{3}, \frac{13}{3}$

Problemas propuestos

13> Discute y resuelve (si son compatibles) los dos sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-y+z=3 \\ 4x+y-3z=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+4z=7 \\ 4x+y=9 \end{cases}$

R: a) Incompatible.
b) Compatible indeterminado: $x=k$; $y=9-4k$; $z=4-\frac{3}{2}k$.

14> Discute, de acuerdo con los valores de a, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+2y+z=2 \\ x+y-2z=a \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax+y-z=5 \\ -x+y+az=-1 \\ -y+2z=a \end{cases}$

Resuélvelos, si es posible, cuando a valga 0.

R: a) Compatible para cualquier valor de a. Si $a=0$: $x=\frac{2}{7}$; $y=\frac{6}{7}$; $z=\frac{4}{7}$.
b) Si $a=-1$, incompatible. En cualquier otro caso será compatible determinado. Si $a=0$: $x=-11$; $y=10$; $z=5$.

15> Discute y resuelve, de acuerdo con los valores de a, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+2y-z=a \end{cases}$

R: a) Si $a\neq-8$, compatible determinado: solución trivial.
Si $a=-8$, indeterminado: $x=k$; $y=7k$; $z=19k$.
b) Si $a\neq-8$, compatible determinado. La solución depende del valor de a. Si $a=-8$, incompatible.

16> PAU Determina para qué valor del parámetro λ el siguiente sistema: $\begin{cases} x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \\ 5x-11y+9z=\lambda \end{cases}$ es compatible y, en ese caso, resuélvelo.

R: Si $\lambda\neq4$, incompatible. Si $\lambda=4$, indeterminado: $x=-\frac{5}{2}+7k$; $y=-\frac{3}{2}+4k$; $z=k$.

Tipo III. Sistemas no lineales

17> Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{y+x}{6}=\frac{5}{6} \\ xy=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=11 \\ xy=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y-x=x-1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=4 \\ x^2-y^2=24 \end{cases}$

R: a) 3 y 2; 2 y 3 b) ±2 y ±1; $\pm\sqrt{3/2}$, $\pm\sqrt{8/3}$
c) 1, 1; $-\frac{1}{5}$, $-\frac{7}{5}$ d) 5, 1.

18> Las longitudes de la altura y la base de un rectángulo cuya área mide 20 cm^2 son dos números enteros consecutivos. ¿Cuánto mide la altura?

R: 4

19> Encuentra las dimensiones de un rectángulo de 110 m de perímetro y de área 700 m^2.

R: 20×35

Tipo IV. Aplicaciones y problemas de sistemas

20> La suma de edades de una madre y su hija es 42 años. Cuando la hija tenga la edad de la madre esa suma será de 90. ¿Cuántos años tiene cada una en la actualidad?

R: 33 y 9

21> Se mezclan 5 dl de esencia con 12 dl de agua de lavanda, pagándose por el perfume resultante 15,30 €. Si se mezclase 1 dl de cada colonia se pagarían 2,28 €. Calcula el precio del decilitro de la esencia.

R: 1,72 €

22> Se alea un lingote de oro puro con otro lingote de 75 % de pureza, obteniéndose 1 kg de aleación, con una pureza del 90 %. ¿Cuántos gramos de cada tipo de lingote se han empleado?

R: 600 y 400

23> Compramos en un colmado 6 kg de café y 3 de arroz por los que pagamos 31,8 €. Otro día, por 1 kg de café y 10 de arroz se pagan 20,5 €. ¿Cuánto nos costarían 5 kg de café y 12 de arroz?

R: 41,7 €

Problemas propuestos

24> En dos tinajas de igual capacidad hay repartidos 100 l de aceite. La primera se llenaría si vertiéramos los $\frac{2}{3}$ del contenido de la segunda, y ésta lo hará si trasvasamos los $\frac{3}{4}$ de la primera. ¿Cuántos litros contiene cada tinaja?

R: $\frac{400}{7}$ y $\frac{300}{7}$

25> Un individuo posee 20 monedas, unas son de 0,50 € y otras de 1 €. ¿Puede tener un total de 16 €?

R: Sí: con 8 y 12 monedas, respectivamente.

26> La suma de las tres cifras de un número es 8. Si se cambia la cifra de las decenas por la de centenas, el número resultante es 90 unidades mayor. Además, la diferencia entre la cifra de unidades y el doble de la de decenas nos da la cifra de las centenas. Halla el número.

R: 125

27> PAU Una empresa ha invertido 73 000 € en la compra de ordenadores portátiles de tres clases *A*, *B* y *C*, cuyos costes por unidad son de 2 400 €, 1 200 € y 1 000 € respectivamente. Sabiendo que, en total, ha adquirido 55 ordenadores y que la cantidad invertida en los de tipo *A* ha sido la misma que la invertida en los de tipo *B*, averigua cuántos aparatos ha comprado de cada clase la empresa.

R: 10, 20, 25

28> PAU En los tres cursos de una diplomatura hay matriculados un total de 350 alumnos. El número de matriculados en primer curso coincide con los de segundo más el doble de los de tercero. Los alumnos matriculados en segundo más el doble de los de primero superan en 250 al quíntuplo de los de tercero. Calcula el número de alumnos que hay matriculados en cada curso.

R: 200, 100, 50

29> PAU En la fabricación de cierta marca de chocolate se emplea leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios de cada kilogramo de los ingredientes son: leche, 0,8 €; cacao, 4 €; almendras, 13 €. En un día se fabrican 9 000 kg de ese chocolate, con un coste total de 25 800 €. ¿Cuántos kilos se utilizan de cada ingrediente?

R: 6 000 kg, 2 000 kg y 1 000 kg, respectivamente

30> La suma de las edades de un padre y sus dos hijos es de 60 años. Dentro de 10 años, la suma de las edades de los hijos será la actual del padre. Por último, cuando nació el pequeño, la edad del padre era 8 veces la del hijo mayor. ¿Cuántos años tiene cada uno de los hijos?

R: 8 y 12

31> Por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva hemos pagado 156 €. Halla el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que un litro de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

R: Leche, 1 €/l; jamón, 16 €/kg; aceite, 3 €/l

32> PAU Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y una tercera de sajones. Al asaltar una fortaleza promete una recompensa de 901 escudos que se repartirán de la siguiente forma: el soldado que primero suba y todos los de su compañía recibirán un escudo; el resto de la recompensa se repartirá a partes iguales entre el resto de los soldados.

Sabiendo que si el primero que sube es un suizo, los de las demás compañías reciben medio escudo; si el primero es zuavo, los restantes reciben un tercio de escudo, y si el primero es sajón, un cuarto de escudo, ¿cuántos hombres hay en cada compañía?

R: 265, 583, 689.

Tipo V. Sistemas de inecuaciones

33> Halla en el plano la solución de:

a) $x - 2y \leq -1$ b) $\frac{x}{2} + y \geq 2$

34> Resuelve dando el resultado en forma de intervalo:

a) $\begin{cases} x \leq 2 \\ 2x - 1 \geq 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 3 > 5 \end{cases}$

R: a) $\varnothing$ b) $(4, +\infty)$

35> Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ 2x \geq 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x-1) - y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos, te recomendamos que estudies un poco más.

1> Encuentra tres soluciones de la ecuación $-x + 5y = 10$ y haz una representación gráfica de la misma.

2> ¿Son equivalentes los sistemas $\begin{cases} x = 3 \\ \dfrac{y-x}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ y $\begin{cases} y - 1 = 3 \\ 2x = y - 2 \end{cases}$?

3> Añade una ecuación al sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ de modo que resulte incompatible.

4> Resuelve el sistema $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + 1 = -x \end{cases}$.

5> Encuentra gráficamente la solución del sistema $\begin{cases} x = -1 + y \\ x + y = 1 \end{cases}$.

6> Razona si los sistemas $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = 1 - y \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ y $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = 1 - y \\ 2x - y = 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ son equivalentes sabiendo que $x = y = 1$ es solución del primero.

7> Resuelve aplicando el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

8> ¿Cuánto tiene que valer m para que el sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ (m-3)z = 3 \end{cases}$ sea incompatible?

9> Halla en función de $z = k$ la solución del sistema $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ -y + z = 2 \end{cases}$.

10> Un tercio de los CD que tengo en casa son prestados. Si son 10 la cuarta parte de los de mi propiedad, ¿cuántos CD tengo en casa?

R: **1.** 0, 2; –5, 1; 5, 3.
2. No.
3. Por ejemplo: $x + y = 5$.
4. –1, 0.
5. 0 y 1.
6. No.
7. 1, 2, –1.
8. 3.
9. $x = 1 + 2k$; $y = -2 + k$; $z = k$.
10. 60.

Cuestiones para investigar

1> En las páginas que siguen puedes encontrar algo de historia de los sistemas de ecuaciones y algo sobre resolución por métodos gráficos.
http://enebro.cnice.mecd.es/~jhep0004/Paginas/CarmenIn/historia.htm#Historia%20de%20los%20sistemas
http://enebro.cnice.mecd.es/~jhep0004/Paginas/CarmenIn/sistemas%20lineales.htm

2> En su artículo «El Algoritmo de las Operaciones Elementales y la Matriz Escalonada Reducida: Conceptos Milenarios y Orientales», la profesora María Cristina Solaeche describe cómo el método de Gauss tiene antecedentes muy antiguos. En concreto cita los Libros VII y VIII del Zhui Zhang Suan Shu (S. II a.C.). Allí se le denomina regla del *fan-chen*. (Puedes verlo en la página http://www.emis.de/journals/DM/v4/art5.pdf.)