DIVISIÓN ENTERA

Dados $a \in N$, $b \in N$, $b \neq 0$, existen y son únicos los números naturales q y r tales que: $\begin{cases} 1)\ a = b \cdot q + r \\ 2)\ r < b \end{cases}$

a = dividendo b = divisor q = cociente r = resto

Ejercicio 1

Completa los siguientes esquemas de división entera discutiendo el número de soluciones:

$\begin{array}{c|c} 33 & \\ \hline 2 & \end{array}$ $\begin{array}{c|c} 42 & \\ \hline & 8 \end{array}$ $\begin{array}{c|c} 72 & \\ \hline 2 & \end{array}$ $\begin{array}{c|c} & \\ \hline 3 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{c|c} 3 & 7 \\ \hline & \end{array}$

Ejercicio 2

Completa los siguientes esquemas de división entera, sabiendo que: $\begin{array}{c|c} a & 5 \\ \hline 1 & q \end{array}$

a) $\begin{array}{c|c} a+2 & 5 \\ \hline & \end{array}$ b) $\begin{array}{c|c} a+6 & 5 \\ \hline & \end{array}$ c) $\begin{array}{c|c} 3a & 5 \\ \hline & \end{array}$ d) $\begin{array}{c|c} 4a+15 & 5 \\ \hline & \end{array}$

Ejercicio 3

Halla un número natural que dividido por 6 da cociente q sabiendo que q dividido 7 da cociente 14 y que el resto en ambas divisiones es igual a 5.

Ejercicio 4

Determina a y b naturales, $b \neq 0$ sabiendo que:

a) $a + b = 11$ $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 2 & 2 \end{array}$

b) $a - b = 8$ $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

c) $a \cdot b = 14$ $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 1 & 3 \end{array}$

Ejercicio 5

Determina los naturales que divididos por 25 dan cociente q y resto q^2.

Ejercicio 6

Determina todos los b y r naturales que cumplen las siguientes condiciones:

$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 2 & q \end{array}$ $\begin{array}{c|c} a+33 & b \\ \hline r & q+3 \end{array}$

Ejercicio 7

Determina a, q y r naturales que cumplan:

$\begin{array}{c|c} a+57 & 16 \\ \hline r & q \end{array}$ $\begin{array}{c|c} 4a-121 & r+5 \\ \hline 19 & 2q-1 \end{array}$

Ejercicio 8

Se sabe que: $\begin{array}{c|c} a & 7 \\ \hline 3 & q_1 \end{array}$ $\begin{array}{c|c} b & 7 \\ \hline 1 & q_2 \end{array}$

Determina los restos que se obtienen al dividir por 7: $a + b$, $5a - b$, a^2, b^2.

DIVISORES Y MÚLTIPLOS

En el caso en que r = 0 $\Rightarrow$ a = b·q, existe división exacta de a entre b. Se dice entonces que: "a es divisible entre b", que "a es múltiplo de b" ($a = \dot{b}$), que "b divide a a" (b|a) o que "b es divisor de "a".

Notaciones:

- $a = b \cdot q \Leftrightarrow b|a$ (b divide a) $\Leftrightarrow a = \dot{b}$ (a es múltiplo de b).
- $d(a) = \{x \in N \,/\, x|a\}$ (conjunto de divisores de a).
- $m(a) = \{x \in N^* / \, x = \dot{a}\}$ (conjunto de múltiplos, no nulos, de a).

Ejercicio 9

Dado A = {25, 42, 1, 78, 45, 21, 7, 4, 3, 9, 5, 0}.

a) Determina los elementos de A que sean múltiplos de 3, de 7, de 5, de 1.
b) Determina los elementos de A que sean divisores de 42, de 78, de 45, de 21.

Observaciones:

- Cuando decimos "b|a" o "$a = \dot{b}$" está implícito que $b \neq 0$.
- El número 1 es el único divisor de todos los números.
- Todo natural distinto de cero es divisor de si mismo.
- El cero no es divisor de ningún número natural.
- 0 es múltiplo de todos los números.
- 1 solamente es múltiplo de sí mismo.

Ejercicio 10

Sean $a \in N$ y $b \in N$. Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de falsedad, demuéstrala con un ejemplo.

a) $a = \dot{4} \Rightarrow a + b = \dot{4}$
b) $a + b = \dot{4} \Rightarrow a = \dot{4}$ o $b = \dot{4}$
c) $a = \dot{4}$ y $b = \dot{4} \Rightarrow a + b = \dot{4}$
d) $a \geq b$, $a = \dot{4}$ y $b = \dot{4} \Rightarrow a - b = \dot{4}$
e) $a = \dot{4}$ y $a + b = \dot{4} \Rightarrow b = \dot{4}$
f) $a = \dot{4} \Rightarrow a \cdot b = \dot{4}$
g) $a \cdot b = \dot{4} \Rightarrow a = \dot{4}$ o $b = \dot{4}$

Teorema 1

1) $\left.\begin{array}{l} a = \dot{c} \\ b = \dot{c} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = \dot{c}$

2) $\left.\begin{array}{l} a \geq b \\ a = \dot{c} \\ b = \dot{c} \end{array}\right\} \Rightarrow a - b = \dot{c}$

Dem.:

1) $\left.\begin{array}{l} a = \dot{c} \underset{\text{definición}}{\Rightarrow} a = c \cdot x \\ b = \dot{c} \underset{\text{definición}}{\Rightarrow} b = c \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = c \cdot x + c \cdot y \underset{\text{distributiva}}{=} c \cdot (x + y) \underset{\text{definición}}{\Rightarrow} a + b = \dot{c}$

2) $\left.\begin{array}{l} a = \dot{c} \underset{\text{definición}}{\Rightarrow} a = c \cdot x \\ b = \dot{c} \underset{\text{definición}}{\Rightarrow} b = c \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a - b = c \cdot x - c \cdot y \underset{\text{distributiva}}{=} c \cdot (x - y) \\ a \geq b \Rightarrow c \cdot x \geq c \cdot y \Rightarrow x \geq y \end{array}\right\} \underset{\text{definición}}{\Rightarrow} a - b = \dot{c}$

Ejercicio 11

Demuestra las siguientes propiedades:

a) $a = \dot{c},\ a + b = \dot{c} \Rightarrow b = \dot{c}$

b) $a = \dot{c} \Rightarrow a \cdot b = \dot{c}$

c) $a = \dot{b}$ y $b = \dot{c} \Rightarrow a = \dot{c}$

d) $x|y,\ y \neq 0 \Rightarrow x \leq y$

Ejercicio 12

Sean a = 2·3·5·61 y b= 3·7·13·61.

a) Indica (sin calcular “a”) 6 divisores de “a”.
b) Indica (sin calcular “b”) 6 divisores de “b”.
c) Indica (sin calcular “a” y “b”) 3 divisores “a + b”.

Ejercicio 13

Sean a = 2·3·7·p, y a + b= 2^3·7·11.

a) Indica 3 divisores de “b”.
b) Explica por qué b no es múltiplo de 11.

Ejercicio 14

Sean a = 2·3·7·p y 11·a + b= 2^2·11·139. Explica por qué b es múltiplo de 11.

Ejercicio 15

Demuestra usando propiedades:

a) La suma de dos números a y b, ambos pares o ambos impares, es un número par.
b) La suma de dos números impares consecutivos es múltiplo de 4.
c) La suma de tres números impares consecutivos es divisible por 3, pero no por 6.

Ejercicio 16

Demuestra que las siguientes afirmaciones son falsas dando un contraejemplo para cada una:

a) si $a|bc \Rightarrow a|b$ o $a|c$

b) si $a|(b + c) \Rightarrow a|b$ o $a|c$

c) si $a|b$ y $c|b \Rightarrow a \cdot c|b$

d) si $n - 1 = \dot{a} \Rightarrow n = (a \dot{+} 1)$

Ejercicio 17

Se sabe que m·n = p, (m + 6)·(n + 6) = p + 132. Determina todos los posibles valores de m y n, sabiendo además que m es múltiplo de n.

Ejercicio 18

Demuestra:

a) $\overline{abc} - (a + b + c) = \dot{9}$

b) $\overline{abcd} + \overline{dcba} = \dot{11}$

c) $\overline{a0000} - a = \dot{11}$

d) $\overline{aabb} = \dot{11}$

e) $a + b = \dot{7} \Rightarrow \overline{aba} = \dot{7}$

f) $a + c + e - b - d = \dot{11} \Rightarrow \overline{abcde} = \dot{11}$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Dados $a \in N^*$ y $b \in N$ llamamos **máximo común divisor de a y b** (D(a, b) o MCD(a, b)) al máximo del conjunto de sus divisores comunes.

En símbolos: $D(a, b) = \text{máx}[d(a) \cap d(b)]$.

Observación: Si $b = 0 \Rightarrow D(a, b) = D(a, 0) = a$ pues $d(0) = N^*$

Ejemplo Busquemos el D(90, 24):

$$\left.\begin{array}{l} d(90) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\} \\ d(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \end{array}\right\} \Rightarrow D(90,\ 24) = 6$$

Teorema 2

Si "r" es el resto de dividir "a" por "b", $b \neq 0 \Rightarrow d(a) \cap d(b) = d(b) \cap d(r)$.

Corolario

Si r es el resto de dividir a entre b, $b \neq 0 \Rightarrow D(a, b) = D(b, r)$

Dem.:

$$d(a) \cap d(b) = d(b) \cap d(r) \Rightarrow \text{máx}[d(a) \cap d(b)] = \text{máx}[d(b) \cap d(r)] \Rightarrow$$

$$D(a, b) = D(b, r)$$

Ejercicio 19

Halla todos los números a y b naturales que cumplan:

$b + D = 196$, $D = D(a, b)$, $b < 190$,

a	b
28	2

Algoritmo de Euclides

Otra forma de hallar el D(90, 24) es la siguiente:

Se divide el mayor entre el menor: $\begin{array}{r|l} 90 & 24 \\ \hline 18 & 3 \end{array}$

Por lo demostrado anteriormente: D(90, 24) = D(24, 18)

Se repite el procedimiento: $\begin{array}{r|l} 24 & 18 \\ \hline 6 & 1 \end{array}$

Por lo demostrado: D(90, 24) = D(24, 18) = D(18, 6)

Se repite el procedimiento: $\begin{array}{r|l} 18 & 6 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$

Por lo demostrado: D(90, 24) = D(24, 18) = D(18, 6) = D(6, 0) = 6

Para facilitar los cálculos se usa esta disposición llamada **Algoritmo de Euclides**:

	3	1	3
90	24	18	6
18	6	0	

Ejercicio 20
Halla: D(3675, 504) y D(18144, 900).

Ejercicio 21
Calcula a y b en cada caso:

a)

	139	1	3
a	b		D
		0	

Sabiendo además que: $b + D = 85$

b)

	8c	c/5	c
a	b		54
		0	

Sabiendo además que: $b + 1 = 65c$

Ejercicio 22
Utilizando el algoritmo de Euclides, calcula:
a) D(n, n + 1) b) D(2n, 2n + 2)

Teorema 3
$D(a,b)=D \Rightarrow D|a \text{ y } D|b$
Dem.:

$$D(a,b)=\text{máx}[d(a)\cap d(b)]=D \Rightarrow D\in[d(a)\cap d(b)] \Rightarrow \begin{cases} D\in d(a) \Rightarrow D\,|\,a \\ D\in d(b) \Rightarrow D|b \end{cases}$$

Corolario: $D(a,b)=D \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\, D|a \text{ y } D|b \\ 2)\, \text{Si } x|a \text{ y } x|b \Rightarrow x|D \end{cases}$ (Lo admitimos)

Lema
Si q y r son cociente y resto de dividir a entre b ($b \neq 0$) y $x \neq 0$, entonces q y $r\cdot x$ son cociente y resto de dividir $a\cdot x$ entre $b\cdot x$.

Teorema 4
Si $x \neq 0$, $D(a, b) = D \Rightarrow D(a\cdot x, b\cdot x) = D\cdot x$ (Lo admitimos)

Corolario: Si $x|a$, $x|b$ y $D(a, b) = D \Rightarrow D(a/x, b/x) = D/x$ (Lo admitimos)