SUCESIONES

Primera definición

Una **sucesión de números reales** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales (N) y cuyo recorrido está contenido en el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

Ejemplos: f: $f(n) = \dfrac{n+2}{n+1}$; g: $g(n) = \sqrt{n}$; h: $h(n) = n^2$, son sucesiones reales.

Notación: Usaremos una notación especial para las sucesiones. A la función la denominaremos (a_n), (b_n), etc. (con paréntesis), a la imagen de n en la sucesión, es decir al valor funcional, lo anotamos a_n, b_n, etc. (sin paréntesis) y le llamamos término enésimo de la sucesión.

En los ejemplos diríamos: (a_n): $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$; (b_n): $b_n = \sqrt{n}$; (c_n): $c_n = n^2$

Si obtenemos los primeros valores funcionales de la sucesión (a_n), podemos representar a la sucesión como:

$$(a_n) = \left\{(0,\ 2),\ \left(1,\ \frac{3}{2}\right),\ \left(2,\ \frac{4}{3}\right),\ \left(3,\ \frac{5}{4}\right), \ldots,\ \left(n,\ \frac{n+2}{n+1}\right), \ldots\right\}$$

Observaciones:

- Sea la relación f: $N \to \mathbb{R}$ / $f(n) = \sqrt{2-n}$. Esta relación no representa una sucesión ya que para todo natural $n \geq 3$, no existen imágenes.

- ¿Y si consideramos g: $g(n) = \dfrac{1}{n-1}$? Con nuestra definición de sucesión, no lo es, ya que 1 no tiene imagen. Sin embargo todo natural mayor a 1 si la tiene. Por este motivo daremos una definición más amplia:

Segunda definición

La función "f" es una sucesión $\Leftrightarrow \exists n_0 \in N \ / \ D(f) = \{n \in N \ / \ n \geq n_0\}$

De aquí en adelante, consideraremos sucesiones de dominio N^*.

Observación:

- Es común representar a la sucesión como el conjunto ordenado de las imágenes.

  Ejemplo: Sea (a_n): $a_n = \dfrac{1}{n}$ entonces podemos representar a la sucesión como:

  $$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots) = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots,\ \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

Ejercicio 1
Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen por término general:

a) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$ b) $a_n = 3+5(n-1)$ c) $a_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ d) $a_n = (n-1)(n-2)$

Diversas maneras de definir una sucesión:

1. Sucesión definida por una fórmula explícita:
   Ya hemos visto que podemos definir una sucesión, como cualquier función, dando la imagen de un natural cualquiera n. Así, la función (a_n) definida por $a_n = 2n + 1$ es la sucesión de los naturales impares.

2. Sucesión definida por una lista o propiedad:
   Algunas sucesiones pueden ser definidas sin dar, a priori, el término general.
   Un ejemplo es la sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, . . .

   Otro ejemplo es la sucesión: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, . . . en que cada natural n figura n veces.

3. Sucesión definida por recurrencia:
   En este caso se da el primer término y un método que permita calcular cualquier término a partir del anterior o de los anteriores.
   La sucesión de los naturales impares se puede definir así: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$

   El ejemplo más célebre de este tipo de definición es la sucesión de **Fibonacci**, en la que cada término, salvo los dos primeros, es la suma de los dos términos precedentes:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

Ejercicio 2

Calcula los cuatro primeros términos de la sucesión definida por: $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} - 1 \end{cases}$

Ejercicio 3
Redefine por recurrencia las siguientes sucesiones definidas por su término general:

a) $a_n = 4n+1$ b) $a_n = 5n$ c) $a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ d) $a_n = \dfrac{n+4}{3}$

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

- Agrega tres términos a cada una de las sucesiones siguientes:
  a) 1300; 1350; 1400; 1450; 1500; . . .
  b) 3,73; 3,77; 3,81; 3,85; 3,89; . . .
  c) 8; 5; 2; -1; -4; . . .

- ¿Qué puedes observar al restar dos términos consecutivos?

- Expresa a_n en función de "n".

Definición:
Se dice que una sucesión (a_n) es una **sucesión aritmética**, **(o progresión aritmética)** si existe un número real "d" tal que para todo natural "n" se cumple: $a_{n+1} = a_n + d$. El número "d" se llama diferencia de la sucesión.

Término general:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\ a_5 &= a_4 + d = a_1 + 4d \\ &\ldots \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{a_{n+1} = a_n + d = a_1 + nd}}$$

Observación:
- Se puede demostrar que si $n > p \Rightarrow a_n = a_p + (n - p)d$

Ejercicio 4
Determina el primer término de la sucesión aritmética (a_n) sabiendo que: $a_7 = 5$ y $d = 1/2$.

Ejercicio 5
De una sucesión aritmética se sabe que: $a_{17} = 315$ y $a_{41} = 351$. Halla a_{100}.

Ejercicio 6
De una sucesión aritmética (a_n) se sabe que: $a_4 + a_5 = -27$ y $a_9 = -36$. Halla a_1 y d.

Ejercicio 7

Determina "d" en cada sucesión: (a_n): $a_n = 3n + 1$ $\quad (b_n) = \begin{cases} b_1 = 7 \\ b_n = \dfrac{2b_{n-1} - 5}{2} \end{cases}$

Ejercicio 8
Sobre un depósito que contenía una cierta cantidad de agua, se ha abierto un grifo de caudal constante. A los 5 minutos el depósito contiene 372 litros y a los 18 minutos contiene 697 litros. Calcular la cantidad inicial de agua, el caudal del grifo y la cantidad de agua que habrá cuando se cierre el grifo, media hora después de abrirlo.

Ejercicio 9
Si $a_1 = 3 - k$, $a_2 = -k$, $a_3 = \sqrt{9-k}$ son términos de una sucesión aritmética, averigua el valor de k y el sexto término de la sucesión.

Suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética:

- Sea (a_n) tal que: $a_1 = 1$ y $d = 1 \Rightarrow (a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots)$
  $\Rightarrow S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \ldots$
  $\Rightarrow S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \ldots$

- Sea $(a_n) = (7, 11, 15, 19, 23, 27, \ldots, 803, \ldots)$
  Calcula: $7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + \ldots + 803$

- Sea (a_n) una progresión aritmética cualquiera:
  $\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$
  $\Rightarrow S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Pero: $a_p + a_{n-(p-1)} = a_1 + (p-1)d + a_n - (p-1)d = a_1 + a_n \Rightarrow 2S_n = n(a_1 + a_n)$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}}$$

Ejercicio 10
Para cada una de las sucesiones aritméticas halla la suma de los 36 primeros términos:

a) $a_1 = 3$ y $d = 2$. b) $a_1 = 4$ y $d = -2$. c) $a_1 = 1/2$ y $a_{36} = 53$.

Ejercicio 11
Un atleta realiza un entrenamiento progresivo de marcha, recorriendo cada día 500 metros más que el anterior, hasta llegar a 18kms diarios. Calcula cuántos días tardará en llegar a recorrer esa distancia, sabiendo que el primer día recorrió 1km.

Ejercicio 12
Calcula la suma de los primeros 20 términos de una progresión aritmética sabiendo que la diferencia es 1/2 y el décimo término es 47/10.

Ejercicio 13
De una progresión aritmética (a_n) se sabe que: $a_3 + a_9 = 46$ y $a_7 = 27$. Halla: a_1, d y S_{20}.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

- Agrega tres términos a cada una de las sucesiones siguientes:
  a) 3; 6; 12; 24; 48; 96; . . .
  b) 16; 8; 4; 2; 1; 1/2; . . .
  c) 18; 6; 2; 2/3; 2/9; 2/27; . . .

- ¿Qué puedes observar al dividir dos términos consecutivos?

- Expresa a_n en función de "n".

Definición
Se dice que una sucesión (a_n) es una **sucesión geométrica (o progresión geométrica)**, si existe un número real "q" tal que para todo natural "n" se cumple que: $a_{n+1} = a_n \cdot q$. El número "q" se llama razón de la sucesión.

Término general: $a_2 = a_1 \cdot q$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^4$$
. . .
$$\boxed{\mathbf{a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^n}}$$

Observación:
- Se puede demostrar que si $n > p \Rightarrow a_n = a_p\, q^{n-p}$

Ejercicio 14
Sea (a_n) una progresión geométrica tal que: $a_1 = 3$ y $q = 3$. Halla a_6.

Ejercicio 15
Si (e_n) es una p.g. tal que: $e_5 = 1/2$ y $q = ½$. Halla e_1.

Ejercicio 16
2916 es un término de una sucesión geométrica, indica qué término es sabiendo que: $a_1 = 4$ y $q = 3$.

Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica:

<u>Propuesta</u>
Les propongo el siguiente negocio: Les entrego $100000 por día durante un mes si ustedes a cambio me entregan: el primer día $1, el segundo día $2, el tercero $4, el cuarto $8 y así, cada día deben entregarme el doble del día anterior, ¿hacemos trato?

Intenten calcular cuánto dinero me habrían dado al cabo de los 30 días.

Generalización:

Sea (a_n) una progresión geométrica de razón q:

$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$\Rightarrow S_n = a_1 + a_1 \times q + a_1 \times q^2 + a_1 \times q^3 + \ldots + a_1 \times q^{n-1}$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{r} q \times S_n = a_1 \times q + a_1 \times q^2 + a_1 \times q^3 + a_1 \times q^4 + \ldots + a_1 \times q^n \\ -S_n = -a_1 - a_1 \times q - a_1 \times q^2 - a_1 \times q^3 - \ldots - a_1 \times q^{n-1} \\ \hline \end{array}$$

$qS_n - S_n = -a_1 + a_1 \times q^n \qquad \Rightarrow (q-1)S_n = a_1(q^n - 1) \Rightarrow \boxed{S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$

Ejercicio 17

Calcula la medida de los cuatro ángulos de un cuadrilátero sabiendo que están en progresión geométrica y que el último es 9 veces el segundo.

Ejercicio 18

Una anciana comunica un secreto a tres comadres, diez minutos después cada una de ellas lo ha comunicado a otras tres y cada una de éstas a tres nuevas en los diez minutos siguientes, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas conocen el "secreto" a las 2 horas?

Ejercicio 19

Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica (a_n), sabiendo que:

$a_1 = 3$ y $a_4 = 1/9$.

Ejercicio 20

De una p.g. (a_n) se sabe que: $a_4 + a_3 = 4/3$, $a_5 = 1/9$ y $q > 0$. Halla a_1 y q.

Ejercicio 21

Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones geométricas:

a) Muestra que $(a_n \cdot b_n)$ es una sucesión geométrica.
b) Muestra que si k es un real fijo, entonces $(k \cdot a_n)$ es una sucesión geométrica.

Ejercicio 22

La suma de tres términos consecutivos en sucesión geométrica es 130, si se suma 20 al del medio sin alterar los extremos, resultan términos consecutivos de una sucesión aritmética. Halla esos números.

Ejercicio 23

Dos sucesiones una aritmética y otra geométrica, tienen ambas como primer término 4, el segundo término de la sucesión aritmética excede en 2 al segundo término de la sucesión geométrica, pero los terceros términos coinciden. Halla el cuarto término de cada sucesión.