Funciones definidas a trozos. Ejemplo 1

Las funciones definidas a trozos son aquellas cuya fórmula consta de dos o más expresiones. La fórmula varía dependiendo del intervalo del eje X que se considere

Por ejemplo, tomemos la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x \ , & \text{si } x \leq -1 \\ 3x \ , & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Su gráfica estará formada por dos trozos:

El trozo de y = 5 – 2x correspondiente al intervalo (- ∞ , -1]

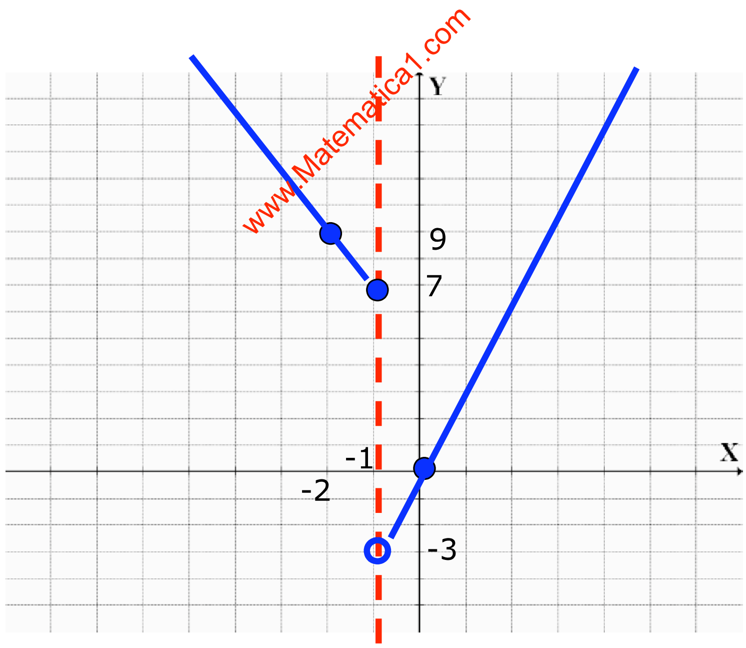
El trozo de y = 3x correspondiente al intervalo (- 1 , ∞)

Tabla 1

x ≤ -1	y = 5 – 2x
-1	7
-2	9

Tabla 2

x > -1	y = 3x
-1	-3
0	0



Dom(f) = R

Rec(f) = (-3, ∞)

Funciones definidas a trozos. Ejemplo 2

$$f(x)=\begin{cases} 4\ , & \text{si } x<2 \\ -x^2\ , & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

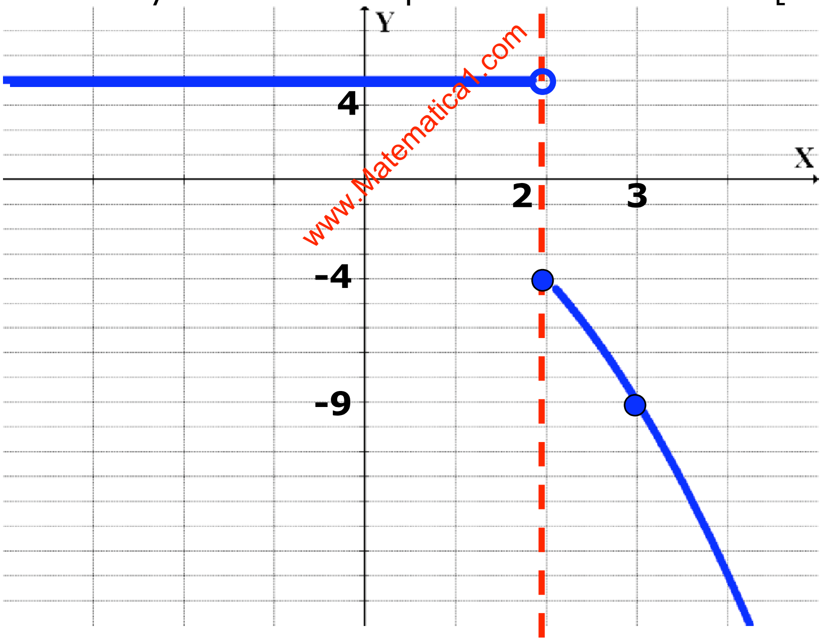
Su gráfica estará formada por dos trozos:

El trozo de la gráfica de y = 4 correspondiente al intervalo (- ∞ , 2)

El trozo de la gráfica de $y = -x^2$ correspondiente al intervalo [2 , ∞)

La abscisa del vértice de la parábola es:

$x_v = 0 \notin [\ 2\ ,\ \infty\ )$



Dom(f) = R

Rec(f) =
(- ∞ , - 4] U { 4 }

Tabla

$x \geq 2$	$y = -x^2$
2	- 4
3	- 9

Funciones definidas a trozos. Ejemplo 3

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+1\ , & \text{si } x<1\\ x-2\ , & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

La gráfica estará formada por dos trozos:

El trozo de $y = x^2/4 + 1$ correspondiente al intervalo $(-\infty , 1)$
El trozo de $y = x - 2$ correspondiente al intervalo $[1 , \infty)$

La parábola no corta al eje X

La abscisa del vértice de la parábola es:

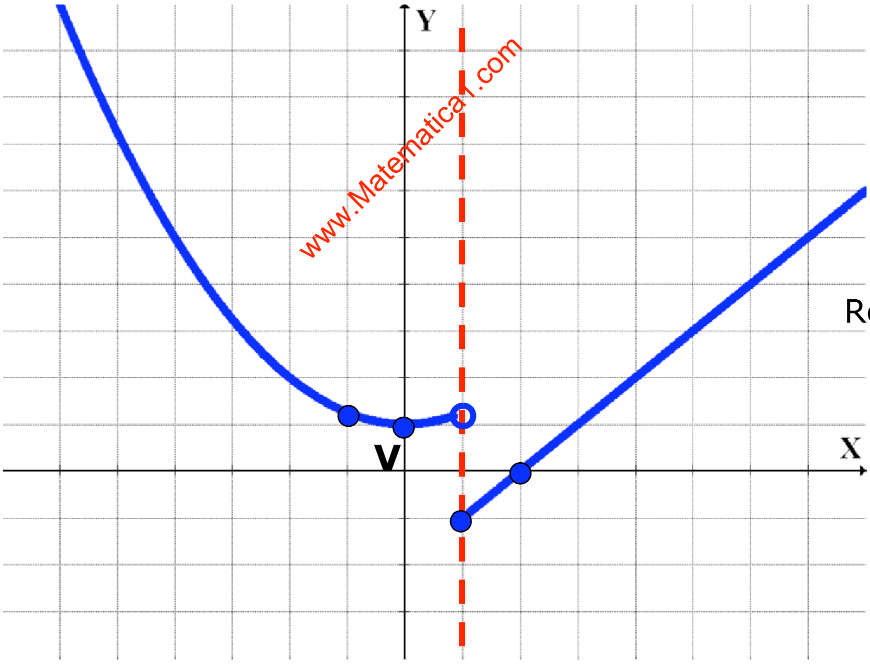
$x_V = 0 \in (-\infty , 1)$

Tabla 1

$x < 1$	$y = x^2/4 + 1$
1	1,25
0	1
-1	1,25

Tabla 2

$x \geq 1$	$y = x - 2$
1	-1
2	0



Dom(f) = R

Rec(f) = $[-1, \infty)$

Funciones definidas a trozos. Ejemplo 4

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-6x+1\ , & \text{si } x<0 \\ 3x^2-3\ , & \text{si } 0<x<3 \\ -4\ , & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

Trozo 1: Parábola de vértice V(-3,10)

Trozo 2: Parábola de vértice V(0,-3)

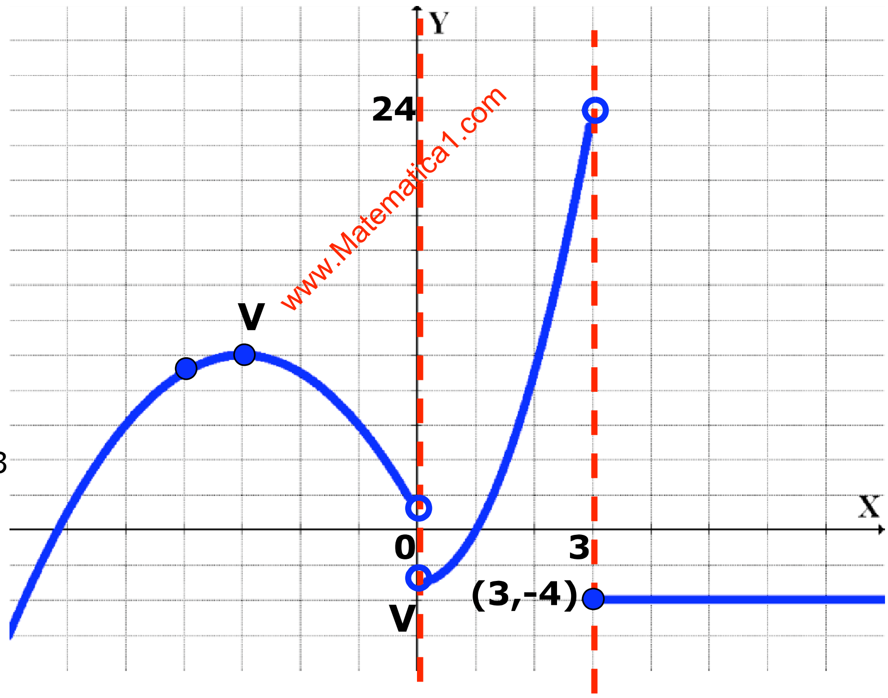
Trozo 3: Semirrecta horizontal que pasa por (3,-4)

Tabla 1

$x<0$	$y=-x^2-6x+1$
0	1
-3	10
-4	9

Tabla 2

$0<x<3$	$y=3x^2-3$
0	-3
3	24



Dom(f) = R – { 0 }

Rec(f) = (- ∞ , 24)

Funciones definidas a trozos. Ejemplo 5

$$f(x)=\begin{cases} 2x+6\ , & \text{si } x\le -2 \\ x^2+2x\ , & \text{si } -2<x\le 1 \\ \dfrac{7-x}{2}\ , & \text{si } 1<x<3 \end{cases}$$

Trozo 1: Semirrecta

Trozo 2: Parábola de vértice V(-1,-1)

Trozo 3: Semirrecta

Tabla 1

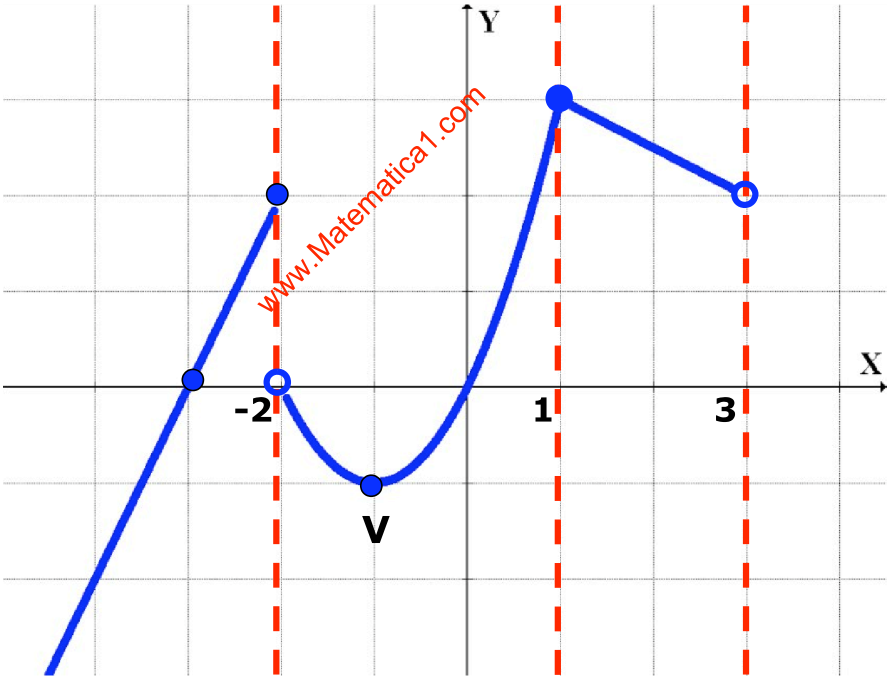
$x \le -2$	$y = 2x + 6$
-2	2
-3	0

Tabla 2

$-2 < x \le 1$	$y = x^2 + 2x$
-2	0
1	3
-1	-1

Tabla 3

$1 < x < 3$	$y = \dfrac{7-x}{2}$
1	3
3	2



Dom(f) = (- ∞ , 3)

Rec(f) = (- ∞ , 3]

Funciones definidas a trozos. Ejemplo 6

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\ , & x \in [-5, 0) \\ x^2 - 4x + 4\ , & x \in [0, 4] \\ 1\ , & x \in (4, 6) \end{cases}$$

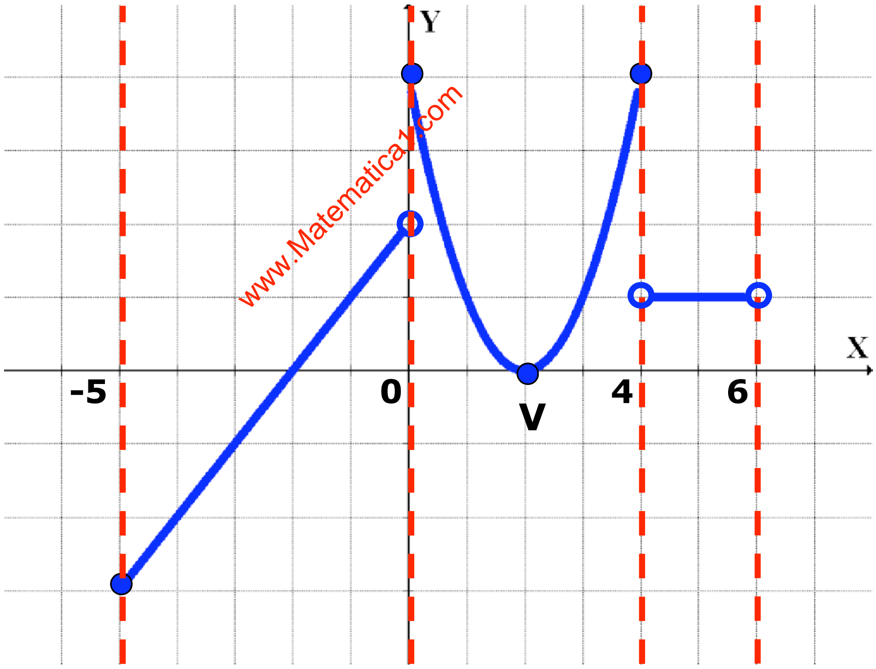
Trozo 1: Semirrecta

Trozo 2: Parábola de vértice V(2,0)

Trozo 3: Semirrecta horizontal que pasa por P(4,1)

Tabla 1

$-5 \le x < 0$	$y = x + 2$
-5	-3
0	2



Dom(f) = [- 5 , 6)

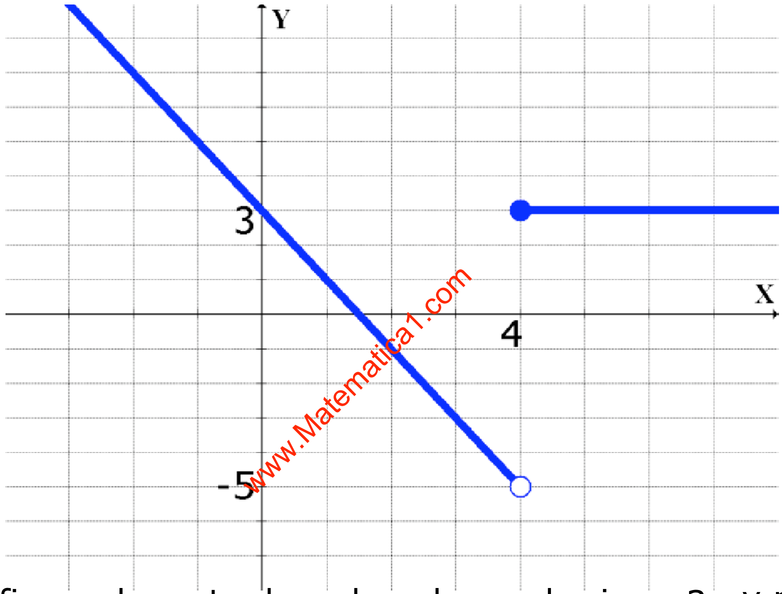
Rec(f) = [- 3 , 4]

Tabla 2

$0 \le x \le 4$	$y = x^2 - 4x + 4$
0	4
4	4
2	0

Funciones definidas a trozos. Expresión a partir de la gráfica

Encuentra la expresión analítica a partir de la gráfica:



Para $x < 4$, la gráfica es la recta de ordenada en el origen 3 y pendiente -2

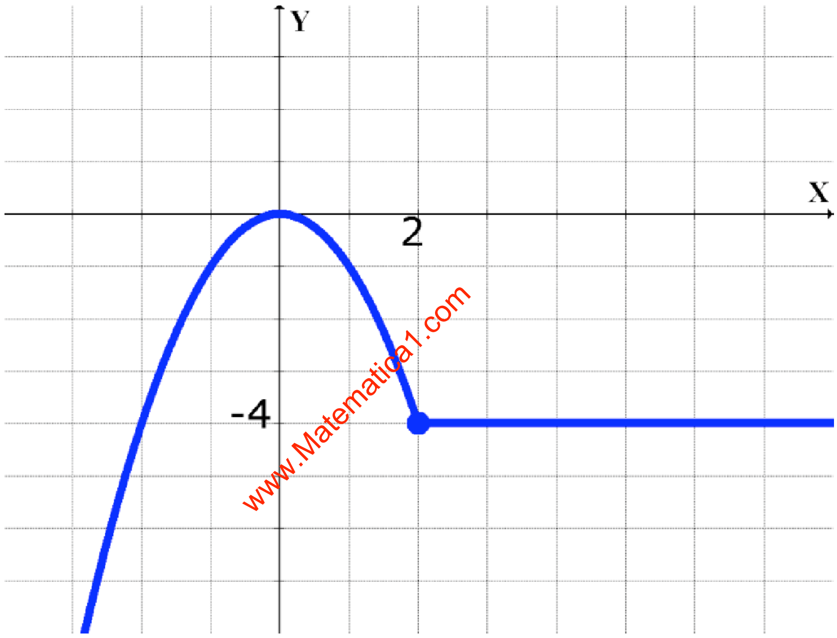
Luego, para $x < 4$, $y = -2x + 3$

Para $x \geq 4$, la gráfica es la recta horizontal $y = 3$

Por tanto, $f(x) = \begin{cases} -2x+3 \ , & \text{si } x < 4 \\ 3 \ , & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Funciones definidas a trozos. Expresión a partir de la gráfica

Encuentra la expresión analítica a partir de la gráfica:



Para $x \leq 2$, la gráfica es la parábola $y = -x^2$

Para $x > 2$, la gráfica es la recta horizontal $y = -4$

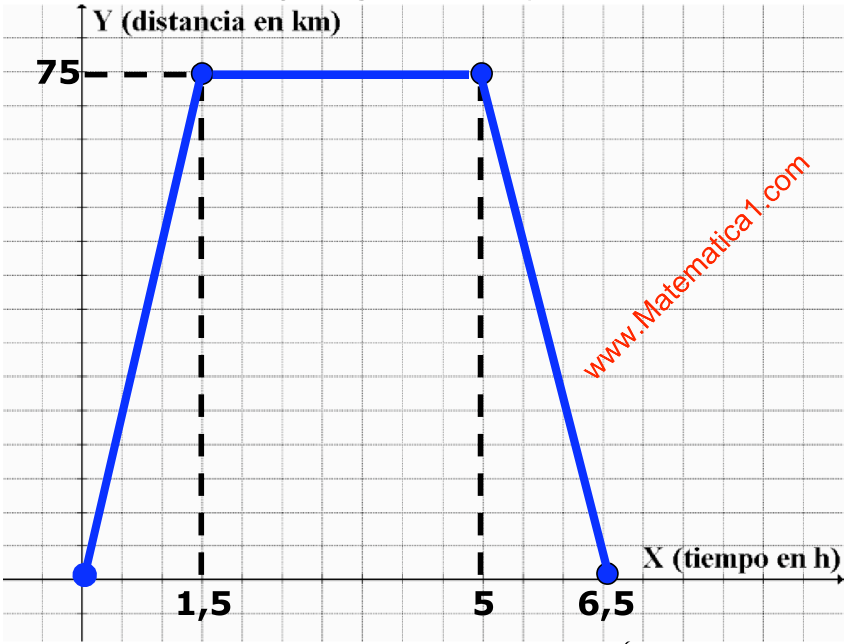
Por tanto, $f(x) = \begin{cases} -x^2 , & \text{si } x \leq 2 \\ -4 , & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Funciones definidas a trozos. Aplicaciones a la vida real. Ejemplo 1

Un grupo de estudiantes de Iznalloz hace una excursión a Sierra Nevada que está a 75 km del instituto tardando hora y media en llegar.

Están allí tres horas y media y regresan tardando igual en la ida que en la vuelta (suponemos velocidad constante)

Dibuja la gráfica tiempo-distancia al instituto del autobús y halla la fórmula.



Para $0 \le x \le 1{,}5$, la gráfica corresponde a la función lineal con pendiente: $75 : 1{,}5 = 50$.

$y = 50x$

Para $1{,}5 \le x \le 5$, la gráfica es la recta horizontal $y = 75$

Para $5 \le x \le 6{,}5$, la gráfica corresponde a la función afín

$y = -50x + 325$

Por tanto, $f(x) = \begin{cases} 50x\,, & \text{si } 0 \le x \le 1{,}5 \\ 75\,, & \text{si } 1{,}5 \le x \le 5 \\ -50x + 325\,, & \text{si } 5 \le x \le 6{,}5 \end{cases}$

Funciones definidas a trozos. Aplicaciones a la vida real. Ejemplo 2

La dosis de un medicamento es 0,20 g por cada kilo de peso del paciente, hasta un máximo de 25 g.

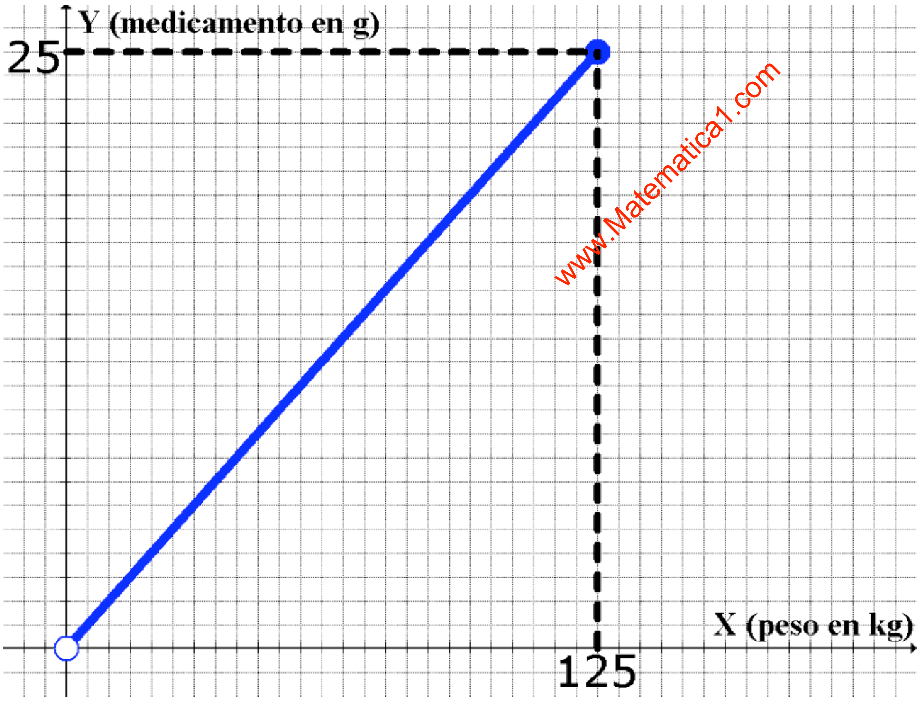
Dibuja la gráfica peso del paciente-cantidad de gramos y halla la fórmula.

Peso del paciente = x

Cantidad de gramos = y

Cantidad de gramos = gramos por cada kg . Nº de kg

$y = 0{,}20 \cdot x$



$y \leq 25 \qquad 0{,}20x \leq 25$

$x \leq 125$

Fórmula:

$f(x) = 0{,}2x$

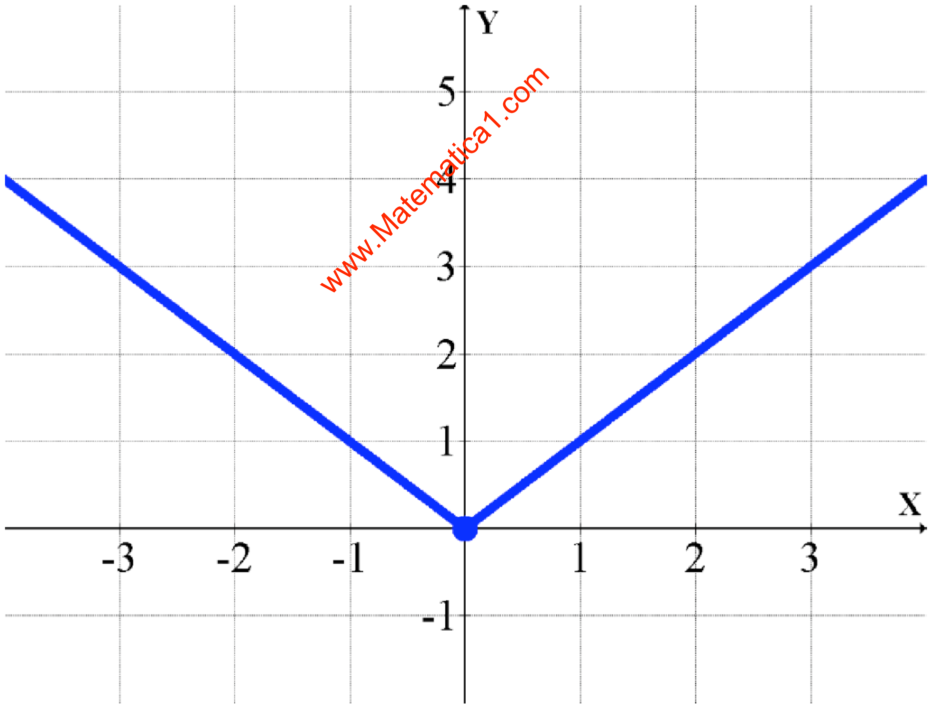
para $x \in (0, 125]$

Función valor absoluto.

La **función valor absoluto de x** hace corresponder a cada número real su valor absoluto.

El valor absoluto de x se representa por | x |

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \ , & \text{si } x \geq 0 \\ -x \ , & x < 0 \end{cases}$$



Valor absoluto de una función.

Dada una función, f(x), podemos construir una nueva función de la siguiente forma:

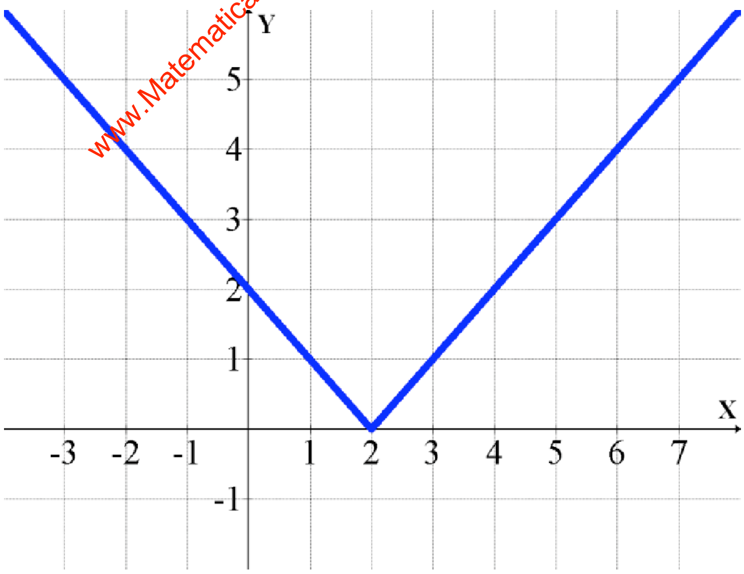
$$| f(x) | = \begin{cases} f(x), & \text{cuando } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{cuando } f(x) < 0 \end{cases}$$

Para trabajar con este tipo de funciones, resolveremos antes la inecuación f(x) ≥ 0

Por ejemplo, sea la función $y = | x - 2 | = \begin{cases} x-2, & \text{cuando } x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & \text{cuando } x-2 < 0 \end{cases}$

Resolvemos: $x - 2 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x \geq 2$ $\qquad y = | x - 2 | = \begin{cases} x-2, & \text{cuando } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{cuando } x < 2 \end{cases}$

$$y = \begin{cases} x-2, & \text{cuando } x \geq 2 \\ -x+2, & \text{cuando } x < 2 \end{cases}$$



Valor absoluto de una función. Ejemplos

1) $f(x) = |6 - x|$ $\qquad 6 - x \geq 0 \leftrightarrow 6 \geq x \qquad f(x) = \begin{cases} 6 - x \ , & \text{cuando } x \leq 6 \\ -6 + x \ , & \text{cuando } x > 6 \end{cases}$

2) $f(x) = |-x - 4|$ $\qquad -x - 4 \geq 0 \leftrightarrow -4 \geq x \qquad f(x) = \begin{cases} -x - 4 \ , & \text{cuando } x \leq -4 \\ x + 4 \ , & \text{cuando } x > -4 \end{cases}$

3) $f(x) = |7x + 35|$ $\qquad 7x + 35 \geq 0 \leftrightarrow x \geq -5 \qquad f(x) = \begin{cases} 7x + 35 \ , & \text{cuando } x \geq -5 \\ -7x - 35 \ , & \text{cuando } x < -5 \end{cases}$

4) $f(x) = \left| \dfrac{5x + 4}{6} \right|$ $\qquad \dfrac{5x + 4}{6} \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x \geq -4/5 \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x + 4}{6} \ , & \text{si } x \geq -4/5 \\ \dfrac{-5x - 4}{6} \ , & \text{si } x < -4/5 \end{cases}$

5) $f(x) = \left| \dfrac{x}{3} - 2 \right|$ $\qquad \dfrac{x}{3} - 2 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x - 6 \geq 0 \quad \leftrightarrow x \geq 6 \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} - 2 \ , & \text{si } x \geq 6 \\ \dfrac{-x}{3} + 2 \ , & \text{si } x < 6 \end{cases}$

Valor absoluto de una función. Más ejemplos

6) $f(x) = | x^2 - 9 |$ $\quad x^2 - 9 \geq 0$ $\quad \begin{cases} x \leq -3 \\ \text{ó} \\ x \geq 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 \ , \ \text{si } x \leq -3 \\ -x^2 + 9 \ , \ \text{si } -3 < x < 3 \\ x^2 - 9 \ , \ \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

7) $f(x) = | - x^2 + 2x + 15 |$ $\quad - x^2 + 2x + 15 \geq 0$ $\quad - 3 \leq x \leq 5$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \ , \ \text{si } x < -3 \\ -x^2 + 2x + 15 \ , \ \text{si } -3 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 2x - 15 \ , \ \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Valor absoluto de una función. Más ejemplos

8) $f(x) = | x^2 - 6x + 9 |$ $\quad x^2 - 6x + 9 \geq 0$ Esta inecuación se cumple para todo x

Por tanto, $x^2 - 6x + 9$ siempre es mayor o igual que cero

Luego, $f(x) = x^2 - 6x + 9$

9) $f(x) = \left| -\dfrac{x^2}{5} + 5 \right|$ $\quad -\dfrac{x^2}{5} + 5 \geq 0 \quad - x^2 + 25 \geq 0 \quad -5 \leq x \leq 5$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{5} - 5, & \text{si } x < -5 \\ -\dfrac{x^2}{5} + 5, & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{x^2}{5} - 5, & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

10) $f(x) = | x^2 - 4x - 3 |$ $\quad x^2 - 4x - 3 \geq 0 \quad 2-\sqrt{7} \leq x \leq 2+\sqrt{7}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3, & \text{si } x < 2-\sqrt{7} \\ x^2 - 4x - 3, & \text{si } 2-\sqrt{7} \leq x \leq 2+\sqrt{7} \\ -x^2 + 4x + 3, & \text{si } x > 2+\sqrt{7} \end{cases}$$

Funciones con valor absoluto. Otro ejemplo

Define en forma de valor absoluto la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 12\ , & \text{si } x \geq 4 \\ -3x + 12\ , & \text{si } x < 4 \end{cases}$

Observa:

$$-(3x - 12) = -3x + 12$$

Luego, la 2ª expresión es la opuesta de la 1ª

$$3x - 12 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x \geq 4$$

Por tanto, $f(x) = |\ 3x - 12\ |$

Función parte entera.

La **función parte entera de x** hace corresponder a cada número real el número entero inmediatamente inferior

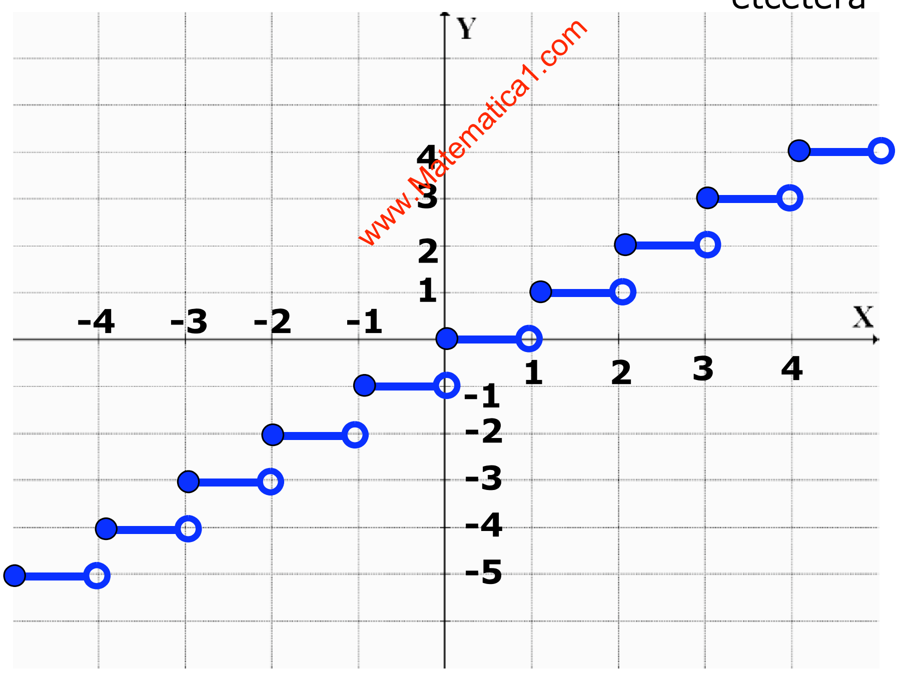
La parte entera de x se representa por E(x)

- Si $0 \leq x < 1$, entonces $E(x) = 0$
- Si $1 \leq x < 2$, entonces $E(x) = 1$
- Si $2 \leq x < 3$, entonces $E(x) = 2$

etcétera

- Si $-1 \leq x < 0$, entonces $E(x) = -1$
- Si $-2 \leq x < -1$, entonces $E(x) = -2$
- Si $-3 \leq x < -2$, entonces $E(x) = -3$

etcétera



Dom(f) = R

Rec(f) = Z