Proyecto MaTEX

Programación Lineal

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

11 de junio de 2004

Versin 1.00

MaTEX

PROGRAMACIÓN LINEAL

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla de Contenido

1. Introducción

La programación lineal surgió específicamente para dar respuesta a problemas de carácter logístico y militar y posteriormente se extendió a amplitud de problemas en el campo de la industria y la economía.

Así por ejemplo, permite resolver problemas de nutrición, distribuciones de factorías, distribuciones de personal en puestos de trabajo, almacenaje, planes de producción, etc.

Para situarnos tomemos un ejemplo.

Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona son de 8 unidades de proteínas, 12 unidades de hidratos de carbono y 9 unidades de grasa. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando dos productos A y B, cuyos contenidos por kg son los de la siguiente tabla:

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Coste/kg
A	2	6	1	600
B	1	1	3	400

¿Cuántos kg de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo?

Sean x los kg de A e y los kg de B, entonces hay que minimizar el coste z

$$z = 600x + 400y$$

Teniendo en cuenta restricciones impuestas en proteínas, hidratos de carbono y grasas, que son:

$$\begin{array}{rcrcr} r_1 \equiv & & 2x + y & \geq & 8 \\ r_2 \equiv & & 6x + y & \geq & 12 \\ r_3 \equiv & & x + 3y & \geq & 9 \\ r_4 \equiv & & x & \geq & 0 \\ r_i \equiv & & y & \geq & 0 \end{array}$$

De este tipo son los problemas que trata la programación lineal.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

2. Inecuaciones en el plano

Definición 1 *Una inecuación en el plano viene dada por una desigualdad del tipo*

$$ax + by \leq c \quad \text{ó} \quad ax + by \geq c$$

y la solución corresponde a un semiplano.

Ejemplo 2.1. Representar la soluciones de la inecuación $x + y \geq 0$

Solución:

- Se representa la recta

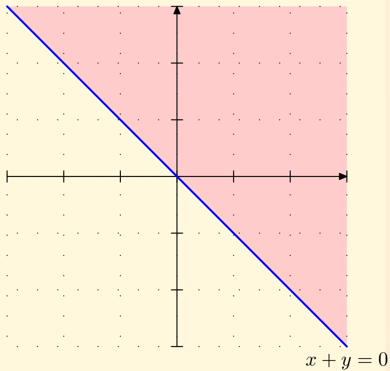
$$x + y = 0 \Longrightarrow y = -x$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = -3 & y = 3 & A(-3,3) \\ x = 3 & y = -3 & B(3,-3) \end{array} \right.$$

- Se despeja y

$$x + y \geq 0 \Longrightarrow y \geq -x$$

- Al quedar y de la forma $\boxed{y \geq}$ marcamos la parte superior.



□

Ejemplo 2.2. Representar la soluciones de la inecuación $x - y \leq 0$

Solución:

- Se representa la recta

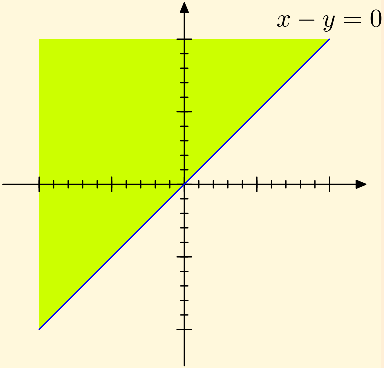
$$x - y = 0 \Longrightarrow y = x$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = -3 & y = -3 & A(-3,-3) \\ x = 3 & y = 3 & B(3,3) \end{array} \right.$$

- Se despeja y

$$x - y \leq 0 \Longrightarrow y \geq x$$

- Al quedar y de la forma $\boxed{y \geq}$ marcamos la parte superior.



$\square$

Test.

1. ¿Qué punto pertenece a la región sombreada de arriba?

(a) $(1,0)$ (b) $(2,0)$ (c) $(1,-1)$ (d) $(-1,2)$

Ejemplo 2.3. Representar la soluciones de la inecuación $x - y \geq 1$

Solución:

- Se representa la recta

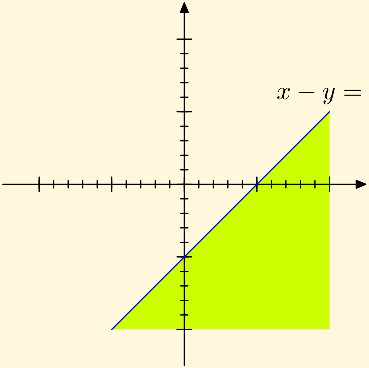
$$x - y = 1 \Longrightarrow y = x - 1$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = -1 & y = -2 & A(-1,-2) \\ x = 2 & y = 1 & B(2,1) \end{array} \right.$$

- Se despeja y

$$x - y \geq 1 \Longrightarrow y \leq x - 1$$

- Al quedar y de la forma $\boxed{y \leq}$ marcamos la parte inferior.



□

Test.

1. ¿Qué punto pertenece a la región sombreada de arriba?

(a) $(0,0)$ (b) $(0,8)$ (c) $(-1,-1)$ (d) $(1,-2)$

Ejemplo 2.4. Representar la soluciones de la inecuación $x + 2y \leq 2$

Solución:

- Se representa la recta

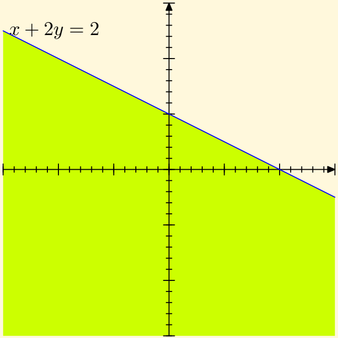
$$x + 2y = 2 \Longrightarrow y = \frac{2 - x}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = -2 & y = 2 & A(-2, 2) \\ x = 2 & y = 0 & B(2, 0) \end{array} \right.$$

- Se despeja y

$$x + 2y \leq 2 \Longrightarrow y \leq \frac{2 - x}{2}$$

- Al quedar y de la forma $\boxed{y \leq}$ marcamos la parte inferior.



□

Test.

1. ¿Qué punto pertenece a la región sombreada de arriba?

(a) $(0, 2)$ (b) $(-1, 0)$ (c) $(-1, 2)$ (d) $(2, 1)$

2.1. Sistemas de inecuaciones

Definición 2 *Un sistema de inecuaciones lineales en el plano viene dado por varias desigualdades del tipo*

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} r_1 \equiv & a_1x + b_1y \leq c_1 \\ r_2 \equiv & a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots & \dots\dots\dots \\ r_n \equiv & a_nx + b_ny \leq c_n \end{array}\right\}} \tag{1}$$

y la solución, si existe, corresponde a una región convexa del plano, que llamamos región factible.

Para su solución gráfica, se representa cada recta y se marca el semiplano que determina. La parte que tienen en común todos los semiplanos proporciona la región factible.

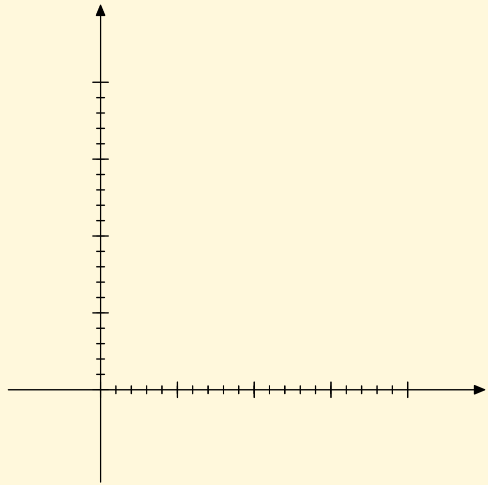
Veamos unos ejemplos detenidamente. A continuación el alumno realizara algunos ejercicios.

Ejemplo 2.5. Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

Representamos



□

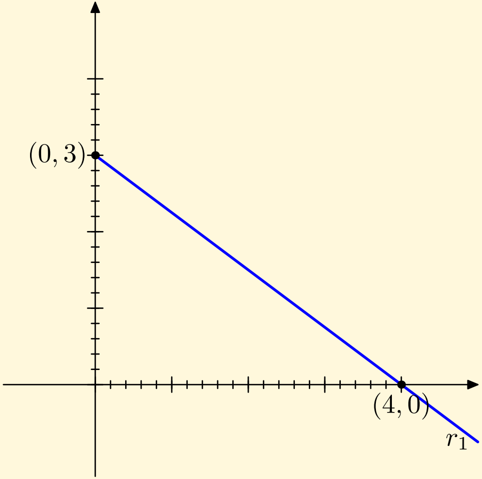
Ejemplo 2.4. Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

Representamos

$$r_1 \equiv 3x + 4y \leq 12$$



$\square$

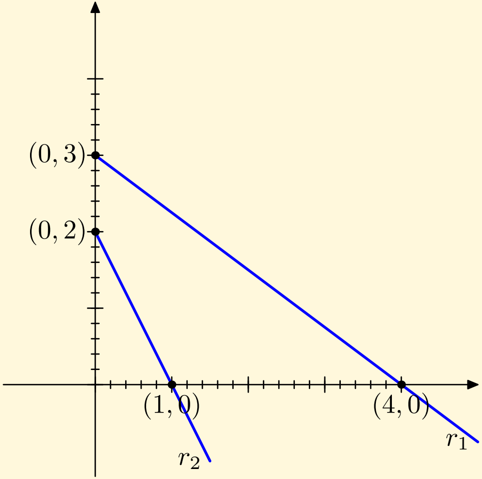
Ejemplo 2.4. Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

Representamos

$$r_1 \equiv 3x + 4y \leq 12$$
$$r_2 \equiv 2x + y \geq 2$$



□

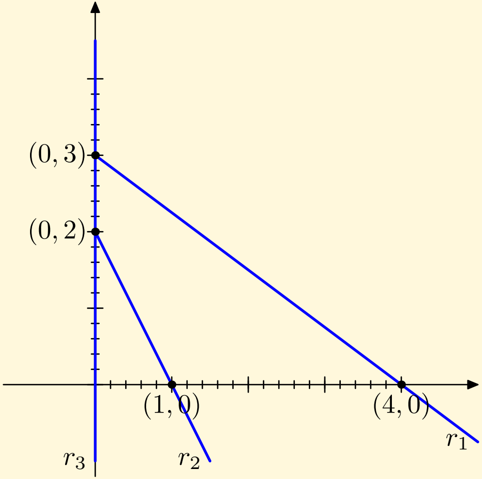
Ejemplo 2.4. Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

Representamos

$$r_1 \equiv 3x + 4y \leq 12$$
$$r_2 \equiv 2x + y \geq 2$$
$$r_3 \equiv x \geq 0$$



□

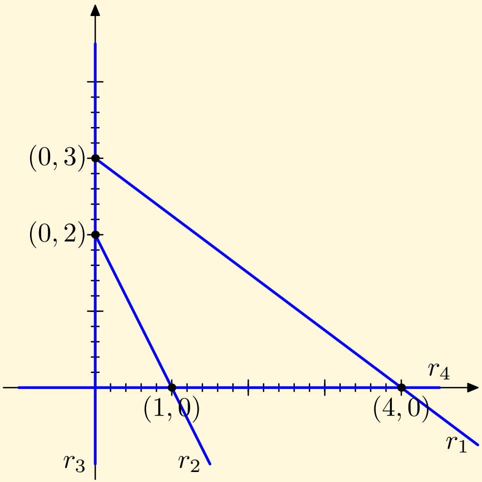
Ejemplo 2.4. Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

Representamos

$$r_1 \equiv 3x + 4y \leq 12$$
$$r_2 \equiv 2x + y \geq 2$$
$$r_3 \equiv x \geq 0$$
$$r_4 \equiv y \geq 0$$



□

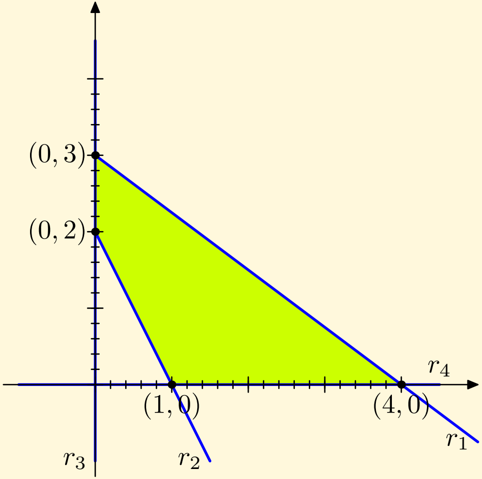
Ejemplo 2.4. Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

Representamos

$$r_1 \equiv 3x + 4y \leq 12$$
$$r_2 \equiv 2x + y \geq 2$$
$$r_3 \equiv x \geq 0$$
$$r_4 \equiv y \geq 0$$



Y sombreamos la región que tienen en común, que se denomina región factible. □

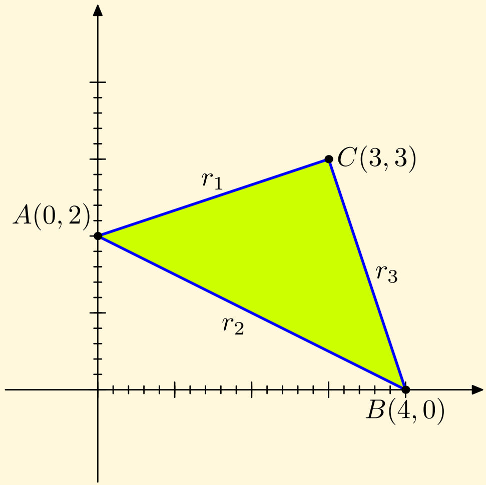
Ejemplo 2.5. Hallar la región factible de:

$$r_1 : x - 3y \geq -6 \qquad r_2 : x + 2y \geq 4 \qquad r_3 : 3x + y \leq 12$$

Solución:

Representamos cada recta

$$r_1 \equiv x - 3y = -6$$
$$r_2 \equiv x + 2y = 4$$
$$r_3 \equiv 3x + y = 12$$



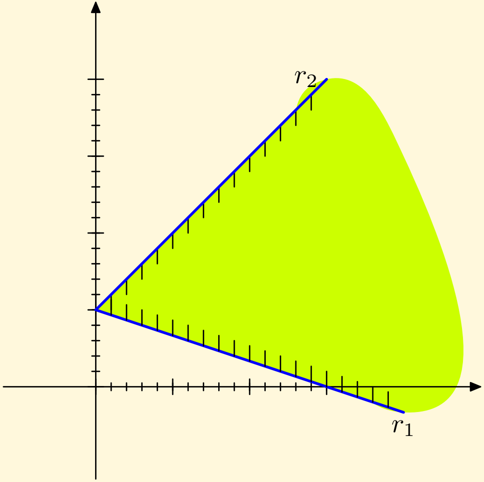
La región factible corresponde al triángulo del dibujo y como está limitada se dice acotada. □

Ejemplo 2.6. Hallar la región factible de:

$$r_1 : x + 3y \geq 3 \qquad r_2 : -x + y \leq 1$$

Solución:

- Representamos la recta
  $$x + 3y = 3$$
  tomando el semiplano $y \geq$
- Representamos la recta
  $$-x + y = 1$$
  tomando el semiplano $y \leq$



La región factible corresponde a la zona coloreada del dibujo y como no está limitada se dice no acotada. □

Ejercicio 1. Hallar la región factible de los sistemas de inecuaciones siguientes:

(a)

$$\begin{array}{rcl} r_1 \equiv & x+y & \leq & 5 \\ r_2 \equiv & x+y & \geq & 2 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} r_1 \equiv & 4x-3y & \geq & -3 \\ r_2 \equiv & x+4y & \geq & 5 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rccc} r_1 \equiv & x & \leq & 2y \\ r_2 \equiv & y-x & \leq & 2 \\ r_3 \equiv & x+y & \leq & 5 \\ r_4 \equiv & x & \geq & 0 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rccc} r_1 \equiv & 2x+4y & \geq & 4 \\ r_2 \equiv & 6x+3y & \geq & 6 \\ r_3 \equiv & x & \geq & 0 \\ r_4 \equiv & y & \geq & 0 \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{rccc} r_1 \equiv & x & \geq & y \\ r_2 \equiv & x & \leq & 2y \\ r_3 \equiv & x & \leq & 20 \end{array}$$

(f)

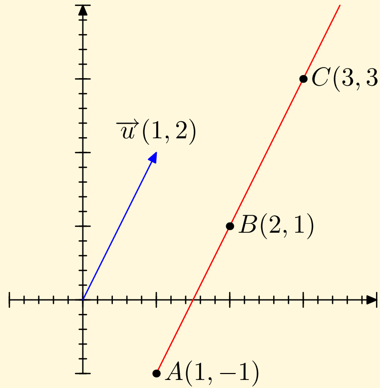
$$\begin{array}{rccc} r_1 \equiv & 3x+2y & \leq & 24 \\ r_2 \equiv & y & \leq & x \\ r_3 \equiv & y & \geq & 1 \end{array}$$

3. Dirección de una recta

Representamos la recta $2\,x - y = 3$ en el plano hallando tres puntos

Despejamos $y = 2\,x - 3$, y damos valores a x

$$
\begin{array}{ll}
x = 1 \to y = -1 & A(1,-1) \\
x = 2 \to y = 1 & B(2,1) \\
x = 3 \to y = 3 & C(3,3)
\end{array}
$$



La dirección de la recta se obtiene restando dos puntos cualesquiera. Así

$$
\begin{array}{ll}
\overrightarrow{u}_1 = B(2,1) - A(1,-1) & \overrightarrow{u}_1(1,2) \\
\overrightarrow{u}_2 = C(3,3) - A(1,-1) & \overrightarrow{u}_2(2,4)
\end{array}
$$

El vector $\overrightarrow{u}(1,2)$ o cualquiera de sus múltiplos es la dirección de la recta

Se puede obtener la dirección de $2\,x - y = 3$ directamente tomando *el coeficiente de y con signo contrario*, y *el coeficiente de x*.

Es decir la dirección es el vector es $\overrightarrow{u}(1,2)$.

Ejemplo 3.1. Hallar la dirección de las rectas

$$r_1 \equiv x - 2\,y = 1; \qquad r_2 \equiv 2\,x - 3\,y = 5; \qquad r_3 \equiv x + 3\,y = 1;$$

Solución:

Como hemos explicado antes no es necesario representarlas, basta tomar *el coeficiente de y con signo contrario*, y *el coeficiente de x*. Así:

La dirección de $r_1 \equiv x - 2\,y = 1$ es $\overrightarrow{u}(2,1)$
La dirección de $r_2 \equiv 2\,x - 3\,y = 5$ es $\overrightarrow{u}(3,2)$
La dirección de $r_3 \equiv x + 3\,y = 1$ es $\overrightarrow{u}(-3,1)$ □

Definición 3 *Decimos que dos rectas son paralelas cuando tienen la misma dirección.*

Ejemplo 3.2. Comprueba que las rectas siguientes son paralelas

$$r_1 \equiv 3x - 2\,y = 0 \qquad r_2 \equiv 3x - 2\,y = 3 \qquad r_3 \equiv 3x - 2\,y = 5$$

Solución:
En efecto son paralelas pues tienen la misma dirección
La dirección de todas ellas es $\overrightarrow{u}(2,3)$. Tienen la misma dirección pero distinto término independiente, por ello son paralelas. □

Test. Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿La dirección de la recta $5\,x + 2\,y + 3 = 0$ es ?

(a) $\overrightarrow{u}(5,2)$ (b) $\overrightarrow{u}(-2,5)$ (c) $\overrightarrow{u}(2,3)$

2. ¿La dirección de la recta $-3\,x + y = 6$ es ?

(a) $\overrightarrow{u}(1,-3)$ (b) $\overrightarrow{u}(-1,-3)$ (c) $\overrightarrow{u}(3,1)$

3. ¿La dirección de la recta $3\,x - 5\,y = 1$ es ?

(a) $\overrightarrow{u}(5,-3)$ (b) $\overrightarrow{u}(5,3)$ (c) $\overrightarrow{u}(3,5)$

4. ¿La dirección de la recta $-2\,x - 3\,y = 2$ es ?

(a) $\overrightarrow{u}(2,-3)$ (b) $\overrightarrow{u}(3,2)$ (c) $\overrightarrow{u}(3,-2)$

5. ¿La dirección de la recta $x = 6$ es ?

(a) $\overrightarrow{u}(1,0)$ (b) $\overrightarrow{u}(1,1)$ (c) $\overrightarrow{u}(0,-1)$

6. ¿La dirección de la recta $2\,y = 5$ es ?

(a) $\overrightarrow{u}(2,5)$ (b) $\overrightarrow{u}(0,2)$ (c) $\overrightarrow{u}(-2,0)$

7. Las rectas $x - 3\,y = 6$ y $x - 3\,y = 0$ son paralelas ?

(a) Si (b) No

8. Las rectas $x - 3\,y = 6$ y $x + 3\,y = 0$ son paralelas ?

(a) Si (b) No

- **Dirección perpendicular de una recta**

  En el gráfico de abajo representamos las rectas

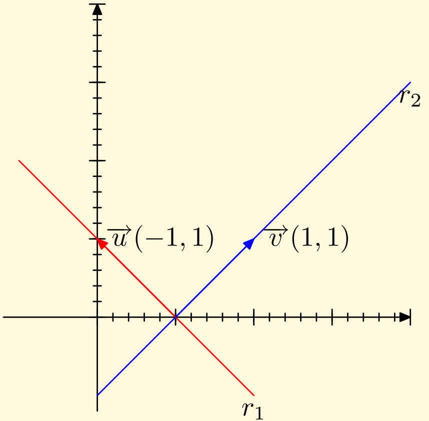
$$r_1 \equiv x + y = 2 \qquad r_2 \equiv x - y = 1$$

En el gráfico se ven que son perpendiculares

dirección de r_1 $\quad \overrightarrow{u}(-1, 1)$
dirección de r_2 $\quad \overrightarrow{v}(1, 1)$

Son perpendiculares cuando el producto de sus vectores es cero

$$\overrightarrow{u}(-1, 1)\cdot\overrightarrow{v}(1, 1) = -1\cdot1+1\cdot1 = 0$$



Definición 4 *Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus vectores es cero.*

Doc Doc
Volver Cerrar

Definición 5 *Dada cualquier recta*

$$r \equiv a\,x + b\,y = c$$

se tiene que su dirección es $\overrightarrow{u}(-b, a)$ *y su dirección perpendicular es* $\overrightarrow{u}(a, b)$*, pues se cumple que el producto de los vectores es cero.*

$$\overrightarrow{u}(-b, a) \cdot \overrightarrow{u}(a, b) = -b \cdot a + a \cdot b = 0$$

Test. Responde a las siguientes cuestiones:

1. Las rectas $5\,x + 2\,y = 3$ y $2\,x - 5\,y = 1$ son perpendiculares ?

(a) verdadero (b) falso

2. Las rectas $3\,x + 2\,y = 3$ y $-3\,x + 2\,y = 5$ son perpendiculares ?

(a) verdadero (b) falso

3. ¿La dirección perpendicular de la recta $3\,x + 2\,y = 3$ es ?

(a) $\overrightarrow{u}(-2, 3)$ (b) $\overrightarrow{u}(3, 2)$ (c) $\overrightarrow{u}(2, 1)$

4. ¿La dirección perpendicular de la recta $2\,x - \ y = 1$ es ?

(a) $\overrightarrow{u}(1, 2)$ (b) $\overrightarrow{u}(2, -1)$ (c) $\overrightarrow{u}(2, 3)$

5. ¿La dirección perpendicular de la recta $2\,x + \ y = 2$ es ?

(a) $\overrightarrow{u}(-1, 2)$ (b) $\overrightarrow{u}(2, -1)$ (c) $\overrightarrow{u}(2, 1)$

4. Optimizar una función lineal

Empezaremos con un ejemplo. Consideremos la función lineal en dos variables

$$z = x + y$$

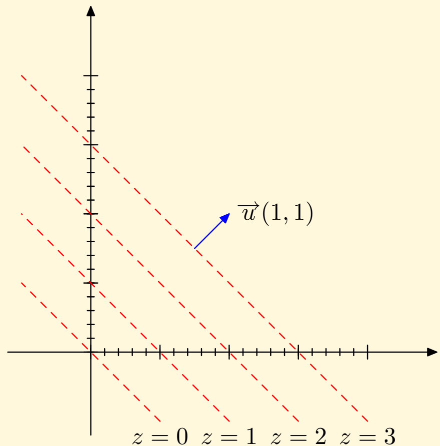
Si damos valores a z obtenemos rectas paralelas llamadas líneas de nivel

$$z = 0 \Longrightarrow x + y = 0$$

$$z = 1 \Longrightarrow x + y = 1$$

$$z = 2 \Longrightarrow x + y = 2$$

$$z = 3 \Longrightarrow x + y = 3$$



Luego si que queremos que z aumente basta desplazar cualquiera de las rectas en la dirección del vector perpendicular $\overrightarrow{u}(1,1)$ y si queremos que z disminuya lo haremos en sentido contrario, en la dirección del vector $\overrightarrow{u}(-1,-1)$

Veamos otro ejemplo. Consideremos la función lineal en dos variables

$$z = x - y$$

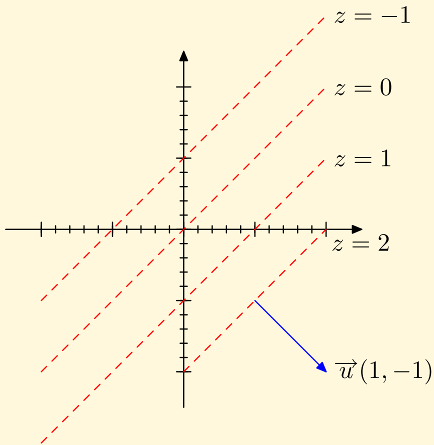
Si damos valores a z obtenemos las rectas paralelas líneas de nivel

$$z = -1 \Longrightarrow x - y = -1$$

$$z = 0 \Longrightarrow x + y = 0$$

$$z = 1 \Longrightarrow x + y = 1$$

$$z = 2 \Longrightarrow x + y = 2$$



Luego si que queremos que z aumente basta desplazar cualquiera de las rectas en la dirección del vector perpendicular $\overrightarrow{u}(1, -1)$ y si queremos que z disminuya lo haremos en sentido contrario, en la dirección del vector $\overrightarrow{u}(-1, 1)$

4.1. Método gráfico

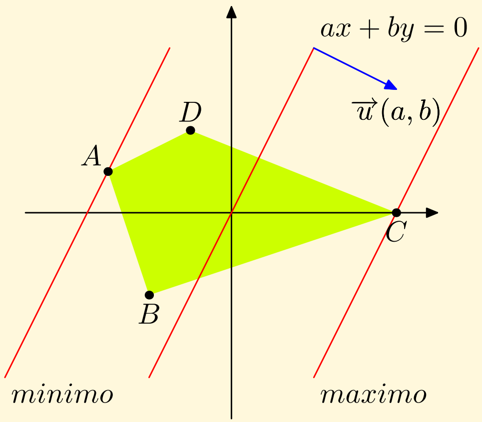
Dada una región factible, para optimizar la función lineal

$$z = a\,x + b\,y$$

- Se dibuja cualquier linea de nivel, por ejemplo

$$a\,x + b\,y = 0$$

- desplazamos la linea en la dirección perpendicular $\overrightarrow{u}(a, b)$ para obtener el máximo, en este caso en C.
- desplazamos la linea en sentido contrario $\overrightarrow{u}(-a, -b)$ para obtener el mínimo, en este caso en A.



MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
PROGRAMACIÓN LINEAL
Doc Doc
Volver Cerrar

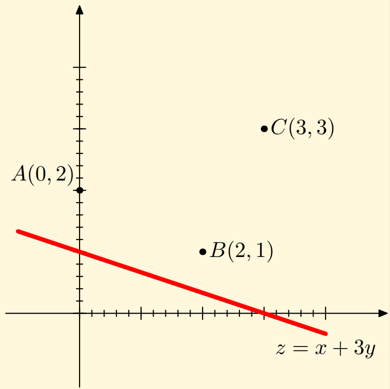
Test. Considera la función $z = x + 3y$ y los tres puntos A, B, C del gráfico y responde a las preguntas:

1. ¿Qué valor toma z en $A(0, 2)$?
(a) 5 (b) 6 (c) 7

2. ¿Qué valor toma z en $C(3, 3)$?
(a) 5 (b) 10 (c) 12

3. ¿En qué punto es z máxima?
(a) $A(0, 2)$ (b) $B(2, 1)$ (c) $C(3, 3)$

4. ¿En qué punto es z mínima?
(a) $A(0, 2)$ (b) $B(2, 1)$ (c) $C(3, 3)$



5. ¿Cuál es el vector de ascenso de z ?
(a) $\overrightarrow{u}(1, -3)$ (b) $\overrightarrow{u}(-1, 3)$ (c) $\overrightarrow{u}(1, 3)$ (d) $\overrightarrow{u}(3, 1)$

6. ¿Cuál es el vector de descenso de z ?
(a) $\overrightarrow{u}(1, -3)$ (b) $\overrightarrow{u}(-1, -3)$ (c) $\overrightarrow{u}(1, 3)$ (d) $\overrightarrow{u}(3, 1)$

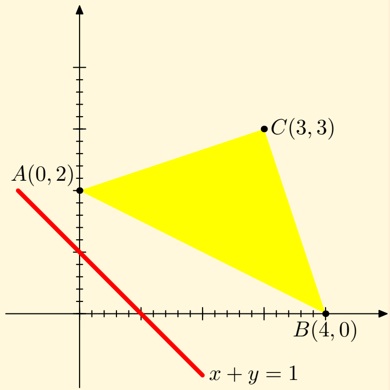
Test. Considera la función $z = x + y$ y la región factible del gráfico y responde a las preguntas:

1. ¿Qué valor toma z en $A(0,2)$?
(a) 0 (b) 1 (c) 2

2. ¿Qué valor toma z en $C(3,3)$?
(a) 5 (b) 6 (c) 7

3. ¿En qué punto es z máxima?
(a) $A(0,2)$ (b) $B(4,0)$ (c) $C(3,3)$

4. ¿En qué punto es z mínima?
(a) $A(0,2)$ (b) $B(4,0)$ (c) $C(3,3)$



5. ¿Cuál es el vector de ascenso de z ?
(a) $\overrightarrow{u}(1,-1)$ (b) $\overrightarrow{u}(-1,1)$ (c) $\overrightarrow{u}(1,1)$ (d) $\overrightarrow{u}(-1,-1)$

6. ¿Cuál es el vector de descenso de z ?
(a) $\overrightarrow{u}(1,-1)$ (b) $\overrightarrow{u}(-1,-1)$ (c) $\overrightarrow{u}(1,1)$ (d) $\overrightarrow{u}(-1,1)$

Test. Considera la función $z = 2x - y$ y la región factible del gráfico y responde a las preguntas:

1. ¿Qué valor toma z en $A(0,2)$?

(a) 0 (b) -1 (c) -2

2. ¿Qué valor toma z en $C(3,3)$?

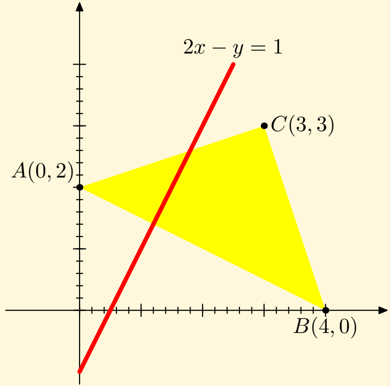
(a) 3 (b) 4 (c) 5

3. ¿En qué punto es z máxima?

(a) $A(0,2)$ (b) $B(4,0)$ (c) $C(3,3)$

4. ¿En qué punto es z mínima?

(a) $A(0,2)$ (b) $B(4,0)$ (c) $C(3,3)$



5. ¿Cuál es el vector de ascenso de z ?

(a) $\overrightarrow{u}(2,-1)$ (b) $\overrightarrow{u}(-2,1)$ (c) $\overrightarrow{u}(1,2)$ (d) $\overrightarrow{u}(-1,-2)$

6. ¿Cuál es el vector de descenso de z ?

(a) $\overrightarrow{u}(1,-2)$ (b) $\overrightarrow{u}(-2,1)$ (c) $\overrightarrow{u}(1,2)$ (d) $\overrightarrow{u}(-1,2)$

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Test. Considera la función $z = 2x - y$ y la región factible del gráfico y responde a las preguntas:

1. ¿Cuál es el vector de ascenso de z ?

(a) $\overrightarrow{u}(1,2)$ (b) $\overrightarrow{u}(2,1)$ (c) otro

2. ¿Tiene mínimo z ?

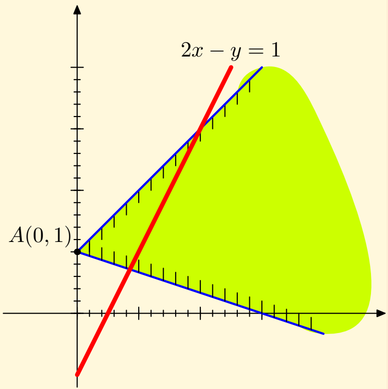
(a) si (b) no

3. ¿Tiene máximo z ?

(a) si (b) no

4. En el punto A, z alcanza un....

(a) mínimo (b) máximo



5. ¿Cuál es el vector de descenso de z ?

(a) $\overrightarrow{u}(2,-1)$ (b) $\overrightarrow{u}(-2,1)$ (c) $\overrightarrow{u}(1,2)$ (d) $\overrightarrow{u}(-1,-2)$

Doc Doc
Volver Cerrar

Test. Considera la función $z = x - 4y$ y la región factible del gráfico y responde a las preguntas:

1. ¿Tiene mínimo z ?

(a) si (b) no

2. ¿Tiene máximo z ?

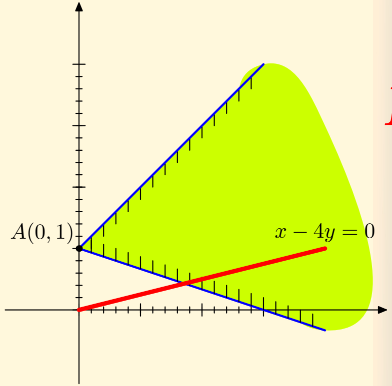
(a) si (b) no

3. En el punto A, z alcanza un....

(a) mínimo (b) máximo (c) nada

4. ¿Cuál es el vector de ascenso de z ?

(a) $\overrightarrow{u}(4, -1)$ (b) $\overrightarrow{u}(1, -4)$ (c) otro



5. ¿Cuál es el vector de descenso de z ?

(a) $\overrightarrow{u}(4, -1)$ (b) $\overrightarrow{u}(-4, 1)$ (c) $\overrightarrow{u}(1, 4)$ (d) $\overrightarrow{u}(-1, 4)$

5. Formulación general del problema

En un problema de programación lineal intervienen: La función

$$z(x, y) = ax + by + c \tag{2}$$

llamada función objetivo y que es necesario optimizar.

En esa expresión x e y son las variables de decisión, mientras que a, b y c son constantes.

Las restricciones que deben ser inecuaciones lineales.

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 \equiv & a_1x + b_1y \leq c_1 \\ r_2 \equiv & a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots & \dots\dots\dots \\ r_n \equiv & a_nx + b_ny \leq c_n \end{array}\right\} \tag{3}$$

Al conjunto de valores de x e y que verifican todas y cada una de las restricciones se lo denomina región factible.

La solución óptima del problema será un par de valores (x_0, y_0) del conjunto factible que haga que $z(x, y)$ tome el valor máximo o mínimo.

5.1. Teorema de la programación lineal

Este resultado general nos dice donde debe estar la solución de un problema de programación lineal.

Dado el problema de optimización con restricciones lineales

$$z = ax + by + c$$

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 \equiv & a_1x + b_1y \leq c_1 \\ r_2 \equiv & a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ r_n \equiv & a_nx + b_ny \leq c_n \end{array}\right\} \tag{4}$$

el máximo o mínimo de z, si existe se alcanza en un vértice de la región factible

5.2. Ejemplos

Ejemplo 5.1. Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$ con las restricciones

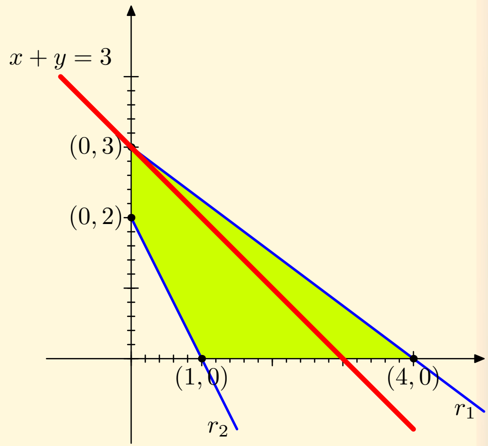
$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

Solución:

- Representamos las rectas y hallamos la región factible
- Representamos un caso concreto de la función objetivo

$$z = x + y = 3$$

- En el gráfico observamos que el máximo se alcanza en $(4, 0)$ y el mínimo se alcanza en $(1, 0)$.



$$\max z = z(4, 0) = 4 \qquad \min z = z(1, 0) = 1$$

□

Ejemplo 5.2. Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$ con las restricciones

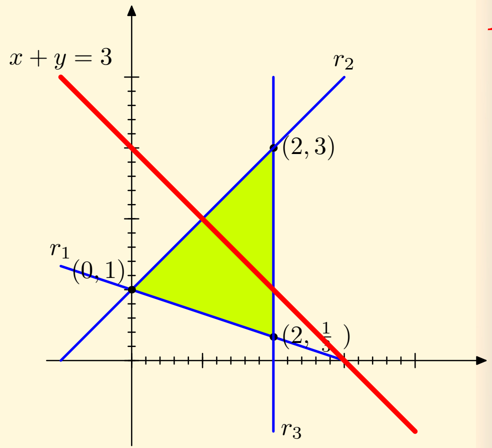
$$r_1 : x + 3y \geq 3 \quad r_2 : -x + y \leq 1 \quad r_3 : x \leq 2$$

Solución:

- Representamos las rectas y hallamos la región factible
- Representamos un caso concreto de la función objetivo

$$z = x + y = 3$$

- En el gráfico observamos que el máximo se alcanza en $(2, 3)$ y el mínimo se alcanza en $(0, 1)$.



$$\max z = z(2, 3) = 5 \qquad \min z = z(0, 1) = 1$$

□

Ejemplo 5.3. Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$ con las restricciones

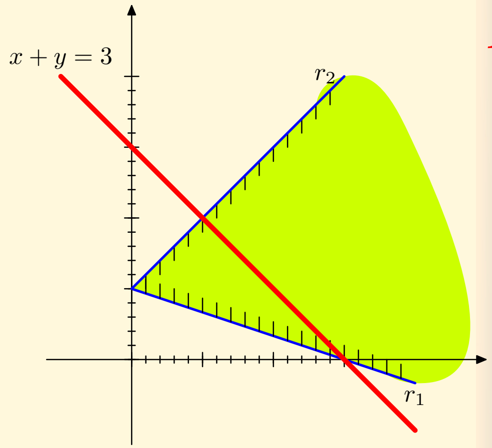
$$r_1 : x + 3y \geq 3 \quad r_2 : -x + y \leq 1$$

Solución:

- Representamos las rectas y hallamos la región factible
- Representamos un caso concreto de la función objetivo

$$z = x + y = 3$$

- En el gráfico observamos que el máximo no existe y el mínimo se alcanza en $(0, 1)$.



$$\max z = \text{ no hay} \qquad \min z = z(0, 1) = 1$$

□

Ejemplo 5.4. Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = -x + y$ con las restricciones

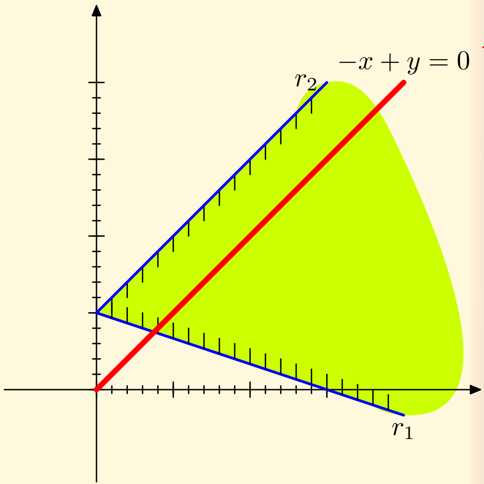
$$r_1 : x + 3y \geq 3 \quad r_2 : -x + y \leq 1$$

Solución:

- Representamos las rectas y hallamos la región factible
- Representamos un caso concreto de la función objetivo

$$z = -x + y = 0$$

- En el gráfico observamos que el máximo no existe y el mínimo se alcanza en todos los puntos de la restricción r_2, pues es paralela a la función objetivo.



$$\max z = \text{ no hay} \qquad \min z = z(0,1) = 1$$

□

6. Ejercicios

Ejercicio 2. Un frutero necesita 16 cajas de naranjas, 5 de plátanos y 20 de manzanas. Dos mayoristas le suministran fruta en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de naranjas, 1 de plátanos y 2 de manzanas. El mayorista B envía en cada contenedor 2 cajas de naranjas, una de plátanos y 7 de manzanas. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 km de distancia y el mayorista B a 300 km, calcular cuántos contenedores habrá de comprar a cada mayorista, con objeto de ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia de lo solicitado.

Ejercicio 3. Una compañía tiene dos minas: la mina A produce diariamente 1 tonelada de carbón de antracita de alta calidad, 2 toneladas de calidad media y 4 toneladas de baja calidad; la mina B produce 2 toneladas de cada una de las tres clases. La compañía necesita 70 toneladas de carbón de alta calidad, 130 de calidad media y 150 de baja calidad. Los gastos diarios de la mina A ascienden a 150 dólares y los de la mina B a 200 dólares. ¿Cuántos días deberán trabajar en cada mina para que la función de coste sea mínima?

Ejercicio 4. Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona en proteínas, hidratos de carbono y grasas son, respectivamente, 8, 12 y 9 unidades. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando dos productos A y B, cuyos contenidos por kg son los de la siguiente tabla:

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Coste/kg
A	2	6	1	600
B	1	1	3	400

¿Cuántos Kg de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo?

Ejercicio 5. En la elaboración de un producto A se necesita una sustancia B. La cantidad de A obtenida es menor o igual que el doble de B utilizada, y la diferencia entre las cantidades del producto B y A no supera los 2 g mientras que la suma no debe sobrepasar los 5 g. Además se utiliza por lo menos 1 g de B y se requiere 1 g de A. La sustancia A se vende a 5 millones y la B cuesta 4 millones el gramo. Calcular la cantidad de sustancia B necesaria para que el beneficio sea máximo.

Ejercicio 6. En una encuesta realizada por una televisión ha detectado que un programa con 20 minutos de variedades y un minuto de publicidad capta 30.000 espectadores, mientras que otro programa con 10 minutos de variedades y 1 minuto de publicidad capta 10.000 espectadores. Para un determinado período, se decide dedicar no más de 80 minutos de variedades y no menos de 6 minutos de publicidad. ¿Cuántas veces deberá aparecer cada programa con objeto de captar el máximo número de espectadores?

Ejercicio 7. Una empresa fabrica dos tipos de tarjetas gráficas, de 16Mb y 32Mb de memoria, respectivamente. Se utilizan dos máquinas que emplean 2 min. en fabricar las de 16Mb y 3 min. en fabricar las de 32Mb. La cadena de montaje puede funcionar un máximo de 300 minutos diarios. Además cada máquina tiene una capacidad máxima de fabricación diaria de 125 unidades, entre las cuales no puede haber más de 90 tarjetas de 16Mb ni más de 80 tarjetas de 32Mb, siendo el beneficio neto de las primeras de 45pts y el de las segundas de 60pts. ¿Cuántas tarjetas de 16Mb y 32Mb debe fabricar diariamente cada máquina para que el beneficio sea máximo?.

Ejercicio 8. Un quiosco de prensa vende bolígrafos a 20 pts y cuadernos a 30 pts. Llevamos 240 pts y pretendemos comprar los mismos cuadernos que bolígrafos por lo menos.
¿Cuál será el número máximo de piezas que podemos comprar?.

Ejercicio 9. Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a sus reses. Dispone para ello de dos tipos de pienso P_1 y P_2, cuyos contenidos vitamínicos por kilogramo son los que aparecen en la tabla:

	A	B
P_1	2	6
P_2	4	3

Si el pienso P_1 vale a 0,4 € el kilogramo y el pienso P_2 vale a 0,6 € el kilogramo, ¿qué cantidades repectivas del pienso P_1 y del pienso P_2 se deben mezclar, para suministrar las vitaminas requeridas con un coste mínimo?

Ejercicio 10. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde

MATEMATICAS 2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
PROGRAMACIÓN LINEAL
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y del número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 150 € por electricista y 120 € por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

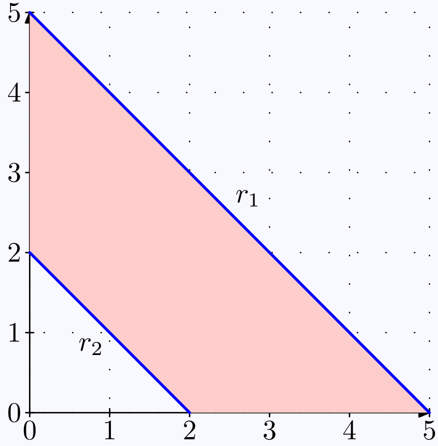
Ejercicio 11. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25 € . La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Soluciones a los Ejercicios

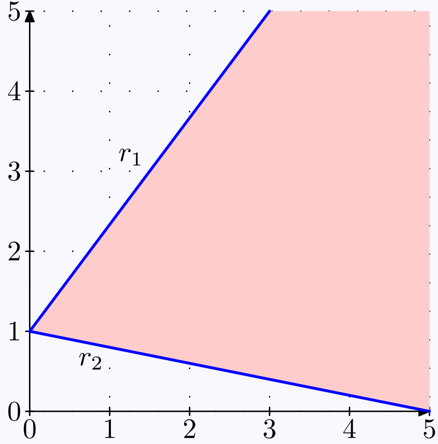
Ejercicio 1(a)

$$\begin{aligned} r_1 \equiv \quad x+y &\leq 5 \\ r_2 \equiv \quad x+y &\geq 2 \end{aligned}$$



Ejercicio 1(b)

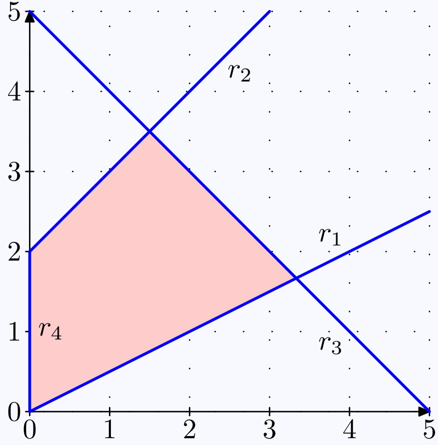
$$\begin{array}{rcrcr} r_1 \equiv & 4x - 3y & \geq & -3 \\ r_2 \equiv & x + 4y & \geq & 5 \end{array}$$



□

Ejercicio 1(c)

$$\begin{array}{rcl} r_1 \equiv & x & \leq 2y \\ r_2 \equiv & y - x & \leq 2 \\ r_3 \equiv & x + y & \leq 5 \\ r_4 \equiv & x & \geq 0 \end{array}$$

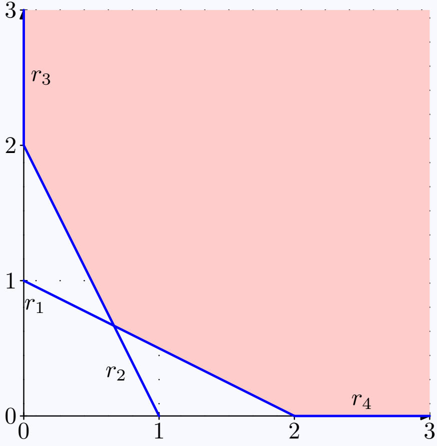


□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 1(d)

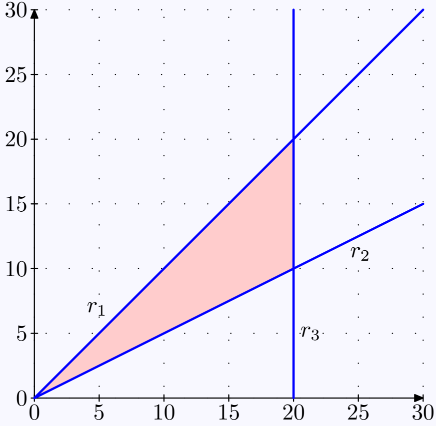
$$\begin{aligned} r_1 \equiv & \quad 2x+4y & \geq & \quad 4 \\ r_2 \equiv & \quad 6x+3y & \geq & \quad 6 \\ r_3 \equiv & \quad x & \geq & \quad 0 \\ r_4 \equiv & \quad y & \geq & \quad 0 \end{aligned}$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 1(e)

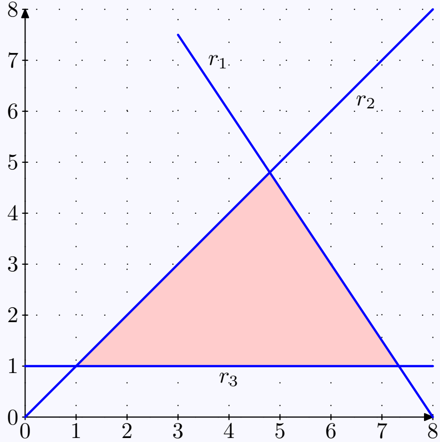
$$\begin{array}{rcl} r_1 \equiv \quad x & \geq & y \\ r_2 \equiv \quad x & \leq & 2y \\ r_3 \equiv \quad x & \leq & 20 \end{array}$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 1(f)

$$\begin{array}{rcccc} r_1 \equiv & 3x+2y & \leq & 24 \\ r_2 \equiv & y & \leq & x \\ r_3 \equiv & y & \geq & 1 \end{array}$$



Ejercicio 2. Sean x los contenedores que envía A e y los contenedores que envía B, entonces hay que minimizar la distancia z

$$z = 150\,x + 300\,y$$

Las restricciones son:

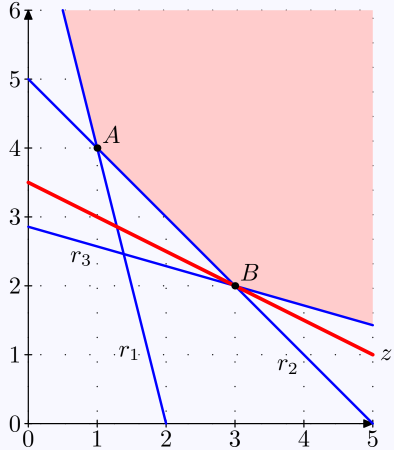
$$\begin{array}{rccc} r_1 \equiv & 8x+2y & \geq & 16 \\ r_2 \equiv & x+y & \geq & 5 \\ r_3 \equiv & 2x+7y & \geq & 20 \end{array}$$

$$r_4 \equiv x \geq 0 \quad r_5 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(1,4)$$
$$r_2 \cap r_3 = B(3,2)$$

El mínimo se alcanza en B,

$$\boxed{z(3,2) = 1050 \text{ kms}}$$



Ejercicio 2

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 3. Sean x los días que trabaja A e y los días que trabaja B, entonces hay que minimizar el coste z

$$z = 150x + 200y$$

Las restricciones son:

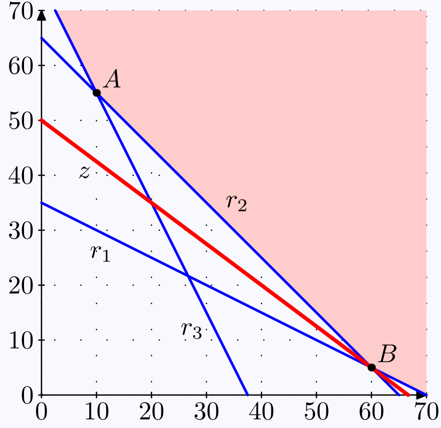
$$\begin{aligned} r_1 &\equiv & x + 2y &\geq 70 \\ r_2 &\equiv & 2x + 2y &\geq 130 \\ r_3 &\equiv & 4x + 2y &\geq 150 \end{aligned}$$

$$r_4 \equiv x \geq 0 \quad r_5 \equiv y \geq 0$$

$$r_2 \cap r_3 = A(10, 55)$$
$$r_1 \cap r_2 = B(60, 5)$$

El mínimo se alcanza en B,

$$\boxed{z(60,5) = 10{,}000}$$



Ejercicio 3

Ejercicio 4. Sean x los kgs de A e y los kgs de B, entonces hay que minimizar el coste z

$$z = 600x + 400y$$

Las restricciones son:

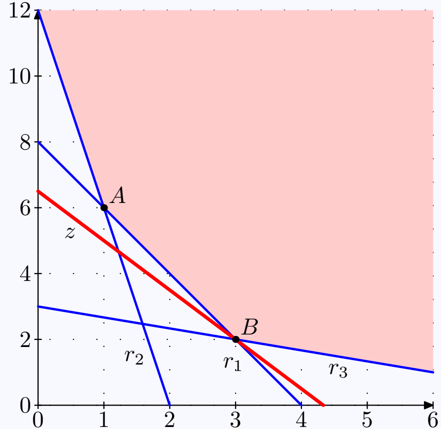
$$\begin{array}{rcll} r_1 \equiv & 2x + y & \geq & 8 \\ r_2 \equiv & 6x + y & \geq & 12 \\ r_3 \equiv & x + 3y & \geq & 9 \end{array}$$

$$r_4 \equiv x \geq 0 \quad r_5 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(1,6)$$
$$r_1 \cap r_3 = B(3,2)$$

El mínimo se alcanza en B,

$$\boxed{z(3,2) = 2600}$$



Ejercicio 4

Ejercicio 5. Sean x los gs de A e y los gs de B, entonces hay que maximizar el beneficio z en millones

$$z = 5x + 4y$$

Las restricciones son:

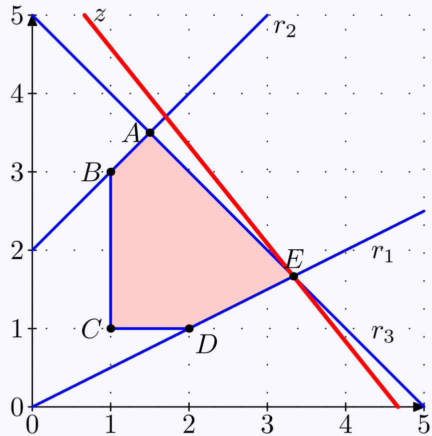
$$\begin{array}{rcl} r_1 \equiv & x & \leq & 2y \\ r_2 \equiv & y - x & \leq & 2 \\ r_3 \equiv & x + y & \leq & 5 \end{array}$$

$$r_4 \equiv x \geq 1 \quad r_5 \equiv y \geq 1$$

$$r_1 \cap r_3 = E(\frac{10}{3}, \frac{5}{3})$$

El máximo se alcanza en E,

$$\boxed{z(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}) = 10} \text{ millones}$$



Ejercicio 5

Ejercicio 6. Sean x los programas del primer tipo e y los programas del segundo tipo, entonces hay que maximizar el número de espectadores z

$$z = 30000\,x + 10000\,y$$

Las restricciones son:

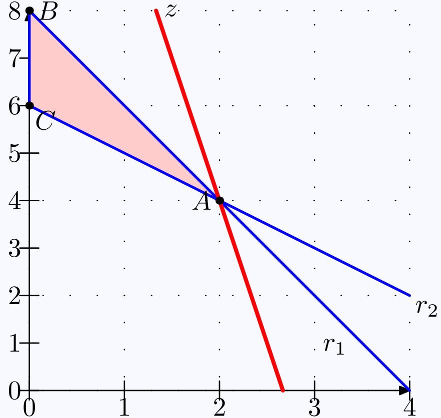
$$\begin{array}{rrcr} r_1 \equiv & 20x + 10y & \leq & 80 \\ r_2 \equiv & x + y & \geq & 6 \end{array}$$

$$r_3 \equiv x \geq 0 \quad r_4 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(2,4)$$

El máximo se alcanza en A,

$$\boxed{z(2,4) = 100{,}000 \text{ espectadores}}$$



Ejercicio 6

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 7. Sean x las tarjetas de 16Mb e y las tarjetas de 32Mb, entonces hay que maximizar el beneficio z

$$z = 45\,x + 60\,y$$

Las restricciones son:

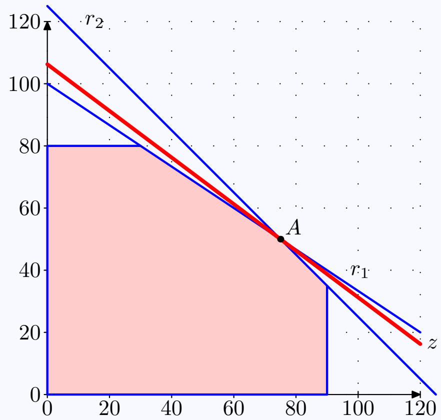
$$\begin{aligned} r_1 \equiv \quad 2x + 3y &\leq 300 \\ r_2 \equiv \quad x + y &\leq 125 \end{aligned}$$

$$r_3 \equiv x \leq 90 \quad r_4 \equiv y \leq 80$$

$$r_1 \cap r_2 = A(75, 50)$$

El máximo se alcanza en A,

$$\boxed{z(75, 50) = 6375 \text{ pts}}$$



Ejercicio 7

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8. Sean x los cuadernos e y los bolígrafos, entonces hay que maximizar la cantidad z

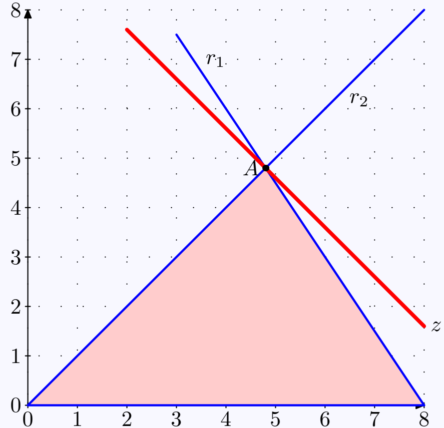
$$z = x + y$$

Las restricciones son:

$$\begin{array}{lrcl} r_1 \equiv & 30x + 20y & \leq & 240 \\ r_2 \equiv & y & \leq & x \end{array}$$

$$r_3 \equiv x \geq 0 \quad r_4 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(4{,}8; 4{,}8)$$



Como tienen que ser enteros, tomamos en el recinto, la pareja $(5,4)$ de enteros más próxima a la solución. Luego, el máximo se alcanza en $(5,4)$,

$$\boxed{z(5,4) = 9 \text{ piezas}}$$

Ejercicio 8

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 9. Sean x los kg de pienso $P1$ e y los kg de pienso $P2$, entonces hay que minimizar el coste z

$$z = 0{,}4\,x + 0{,}6\,y$$

Las restricciones son:

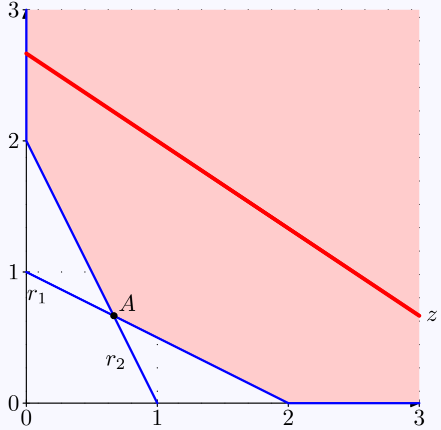
$$\begin{array}{lccc} r_1 \equiv & 2x+4y & \geq & 4 \\ r_2 \equiv & 6x+3y & \geq & 6 \end{array}$$

$$r_3 \equiv x \geq 0 \quad r_4 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(2/3;2/3)$$

Luego, el mínimo se alcanza en $(2/3, 2/3)$,

$$\boxed{z(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}}\ €$$



Ejercicio 9

Ejercicio 10. Sean x los mecánicos e y los electricistas, entonces hay que maximizar el beneficio z

$$z = 120x + 150y$$

Las restricciones son:

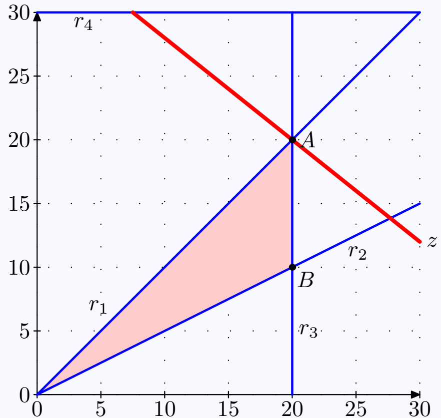
$$\begin{array}{rccc} r_1 \equiv & x & \geq & y \\ r_2 \equiv & x & \leq & 2y \end{array}$$

$$r_3 \equiv x \leq 20 \quad r_4 \equiv y \leq 30$$

$$r_1 \cap r_4 = A(20; 20)$$

Luego, el máximo se alcanza en $A(20, 20)$,

$$\boxed{z(20, 20) = 5400} \text{ €}$$



Ejercicio 10

Ejercicio 11. Sean x las joyas de tipo A e y las joyas de tipo B, entonces hay que maximizar el beneficio z

$$z = 25x + 30y$$

Las restricciones son:

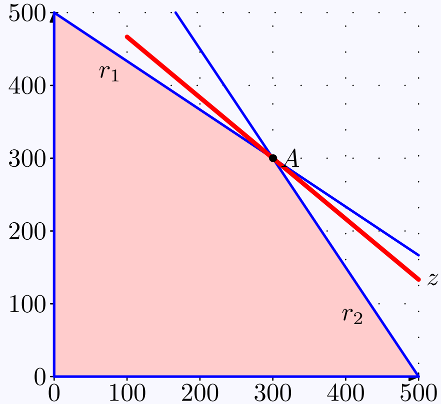
$$\begin{array}{rcl} r_1 \equiv \quad x + 1{,}5y & \leq & 750 \\ r_2 \equiv \quad 1{,}5x + y & \leq & 750 \end{array}$$

$$r_3 \equiv x \geq 0 \quad r_4 \equiv y \geq 0$$

$$r_1 \cap r_2 = A(300; 300)$$

Luego, el máximo se alcanza en $A(300, 300)$,

$$\boxed{z(300, 300) = 15500} \text{ €}$$



Ejercicio 11

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Recuerda que si la función objetivo z es lineal

$$z = a\,x + b\,y$$

su vector dirección de ascenso es $\overrightarrow{u}(a, b)$ y su vector dirección de descenso es $\overrightarrow{u}(-a, -b)$. Luego para $z = x + 3y$:
su vector dirección de ascenso es $\overrightarrow{u}(1, 3)$ y su vector dirección de descenso es $\overrightarrow{u}(-1, -3)$. Final del Test

Índice alfabético