Números primos entre sí

Dados a y b naturales, decimos que a y b son primos entre sí $\Leftrightarrow$ D(a, b) = 1.

Ejercicio 23

Investiga en cada caso (sin calcularlos), si a y b son primos entre sí:

a) $a = 2^3 \cdot 7$, $b = 3 \cdot 5 \cdot 7$
b) $a = 3^2 \cdot 11 \cdot 13$, $b = 2^5 \cdot 7$
c) $a = 2^3 \cdot 7$, $b = 3^2 \cdot 11 \cdot 13$
d) $a = 2^3 \cdot 7$, $b = 2^5 \cdot 7$
e) $a = 2^5 \cdot 7$, $b = 3 \cdot 5 \cdot 7$
f) $a = 3^2 \cdot 11 \cdot 13$, $b = 3 \cdot 5 \cdot 7$

Teorema 5

$$D(a,\ b) = x \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \cdot x \\ b = b' \cdot x \\ D(a',\ b') = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 24

Halla todos los números a y b naturales que cumplan en cada caso:

a) $D(a, b) = 3^2 \cdot 7$ $\quad a + b = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$
b) $D(a, b) = 13$ $\quad a - b = 156$ $\quad a < 234$
c) $D(a, b) = 14$ $\quad a^2 - b^2 = 2548$

Ejercicio 25

Halla todos los naturales a y b que cumplan: $D(a, b) = 30$, $a^2 + 30b = 13500$.

Ejercicio 26

Determina todos los a y b naturales sabiendo que:

$a + b = 266$, $D(a, b) = D(12920, 10374)$, $2a < b$.

Teorema 6 (de Euclides)

$a \mid b \cdot c,\ D(a,\ b) = 1 \Rightarrow a \mid c$

Dem.:

$D(a,\ b) = 1 \Rightarrow D(a \cdot c, b \cdot c) = c$

$$\left.\begin{array}{l} a \mid a \cdot c \\ a \mid b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid D(a \cdot c,\ b \cdot c) \Rightarrow a \mid c$$

Ejercicio 27

a) Demuestra que $\overline{aba} = \dot{7} \Rightarrow a + b = \dot{7}$
b) Determina todos los capicúas de tres cifras que son múltiplos de 21.

Teorema 7

$$\left.\begin{array}{r} a \mid b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n \\ D(a,\ b_1) = D(a,\ b_2) = \ldots\ldots = D(a,\ b_{n-1}) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid b_n \quad \text{(Lo admitimos)}$$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Si $a \in N^*$ y $b \in N^*$, llamamos **mínimo común múltiplo de a y b** (m(a, b) o mcm(a, b)) al mínimo del conjunto de múltiplos comunes no nulos.

En símbolos: $m(a, b) = \text{mín}[m(a) \cap m(b)]$.

Ejercicio 28

Halla m(12, 30), D(12, 30), m(21, 28), D(21, 28), m(48, 18), D(48, 18), m(81, 27), D(81, 27), m(13, 7), D(13, 7).

Teorema 8

$m(a, b) \cdot D(a, b) = a \cdot b$

Ejercicio 29

Demuestra:

a) Si a y b son primos entre sí $\Rightarrow m(a, b) = a \cdot b$
b) Si $a = a' \cdot D(a, b)$ y $b = b' \cdot D(a, b) \Rightarrow m(a, b) = a' \cdot b' \cdot D(a, b)$
c) Si $m(a, b) = m \Rightarrow m(a \cdot x, b \cdot x) = m \cdot x$, si $x \neq 0$.
d) Si $x|a$, $x|b$ y $m(a, b) = m \Rightarrow m(a/x, b/x) = m/x$

Ejercicio 30

Halla todos los posibles a y b naturales tales que: $D(a, b) = 11$, $m(a, b) = 7 \cdot 11 \cdot 13$

Ejercicio 31

Halla a y b sabiendo que: $m(a, b) \cdot D(a, b) = 48$ y $a^2 - b^2 = 28$

Ejercicio 32

Completa la tabla teniendo en cuenta que $a > b$:

a	b	D(a, b)	m(a, b)	a + b	a – b	a·b	Inform. Adicional
				705	345		
		12		156			$b > 60$
		D(77, 154)			308		$1100 < a + b < 1600$

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Números primos

Sea $p \in N$, p es primo $\Leftrightarrow d(p) = \{1, p\}$.

Teorema 9

p es primo, $p|a \cdot b \Rightarrow p|a$ o $p|b$

Dem.:

Si $p \in d(a)$ el teorema está demostrado.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \text{Si } p \notin d(a) \\ p \text{ es primo} \Rightarrow d(p) = \{1, p\} \end{array}\right\} \Rightarrow D(a, p) = 1 \\ p|a \cdot b \end{array}\right\} \underset{\textit{por Euclides}}{\Rightarrow} p|b$$

Criba de Eratóstenes

Busca el primer número primo y luego tacha todos sus múltiplos. Luego busca el siguiente número primo y tacha todos sus múltiplos. Repite el procedimiento. ¡Habrás obtenido todos los números primos hasta el 100!

~~0~~	~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Ejercicio 33

Indica cuáles de los siguientes números naturales son números primos:

a) 211 b) 403 c) 1147 d) 2003

<u>Números compuestos</u>

Sea $c \in N$, $c \neq 0$, $c \neq 1$, se dice que c es compuesto $\Leftrightarrow$ c no es primo.

Sea x compuesto, diremos que x admite una descomposición en producto de factores primos (DPFP) si $x = a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot m$, con a, b, c, . . ., m primos.

Teorema 10

Si x es compuesto $\Rightarrow$ x admite una DPFP única. (Lo admitimos)

Teorema 11

El conjunto de los números primos no tiene máximo.

Ejercicio 34

Investiga (sin realizar operaciones) si el número $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ es divisible por: $2^2 \cdot 3^2$, $3 \cdot 5^2 \cdot 7$, $2^3 \cdot 7$.

Ejercicio 35

Completa la tabla teniendo en cuenta que a > b:

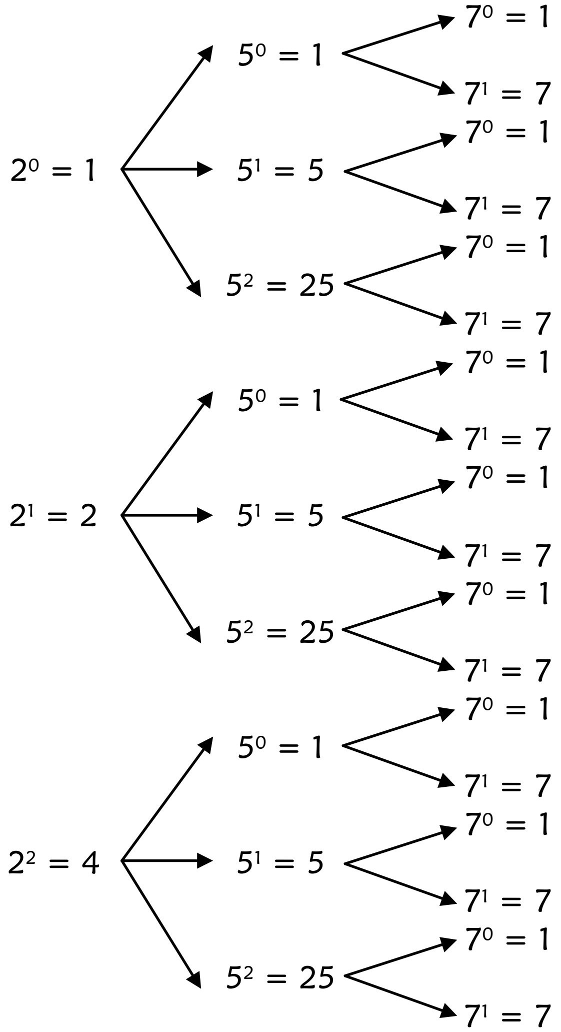
a	b	D(a, b)	m(a, b)	a + b	a – b	a·b	Inform. Adicional
		35				257250	100 < a – b < 500
		231	9702				4b < a < 5b

Ejercicio 36

Calcula el menor número distinto de 0 por el que hay que multiplicar a 3750 para obtener un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el menor número por el que hay que dividirlo?

Número de divisores de un natural

Dado el número 700 si efectuamos su DPFP obtenemos: $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.



Observen que: $\upsilon_{700} = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

Generalizando: si $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \Rightarrow \nu_n = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$

Ejercicio 37

Halla el número de divisores de los siguientes números: 1188, 54925, 33511.

Ejercicio 38

Halla a y b naturales que cumplan: $a^2b - ab^2 = 1920$, D(a, b) tiene tres divisores.

Ejercicio 39

Halla a y b naturales sabiendo que: D(a, b) = 20, m(a, b) = 440.

Ejercicio 40

Sean dos naturales a y b con a > b tales que D(a, b) = D y m(a, b) = m.

a) Halla D y m sabiendo que: $\begin{cases} m - 5D = 1768 \\ m + 2D = 2720 \end{cases}$

b) Halla todos los posibles valores de a y b.

c) Halla cuál es el menor número diferente de cero por el cual hay que multiplicar al mayor valor de a para que el número obtenido sea cuadrado perfecto.

Ejercicio 41
Halla todos los pares de números naturales a y b tales que:
$m(a, b) = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13$, $a + b = 5628$.

Ejercicio 42
Halla a y b naturales sabiendo que: $a \cdot b = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13^2$; b dividido entre a da resto 26 y $D(a, b) > 13$.

Ejercicio 43
Halla los números naturales a, b y q sabiendo que:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline 1155 & q \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} a + 70 & b - 7 \\ \hline 70 & q + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} b & q \\ \hline 2 & 123 \end{array}$$

Ejercicio 44
Calcula a y b en el siguiente algoritmo, sabiendo que: $a + D = 810$

	13	2	2	2
a	b			D
			0	

Ejercicio 45
Calcula $a, b, c \in N$ / $D(a, b) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, $m(a, c) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ y $b \cdot c = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$

Ejercicio 46
Halla un número natural n sabiendo que: $\upsilon_n = 20$, $n = 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, $\alpha > \beta$ y $n = \overset{\bullet}{25}$.

Ejercicio 47
Halla dos naturales a y b, sabiendo que el $D(a, b) = 18$, $\upsilon_a = 15$, $\upsilon_b = 10$.

Ejercicio 48
Halla el número natural $n = 5^{\alpha} \cdot 7^{\beta} \cdot 13^{\delta}$, sabiendo que 5n tiene 20 divisores más que n y que 13n tiene 12 divisores más que n.