MATERIAL DE APOYO

POTENCIACIÓN Y FUNCIÓN EXPONENCIAL:

Definiciones:

1) Sean: $a \in R, n \in N: \begin{cases} a^0 = 1 \ \ siendo a \neq 0 \\ a^1 = a \\ a^n = \underbrace{a.a.a.a........a}_{n\ factores}, \quad n \geq 2 \end{cases}$

2) Sean: $a \in R, a \neq 0 \ y \ n \in N,$ $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

3) Sean: $a \in R^+, n \in N, n \neq 0 \ y \ p \in Z,$ $\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad y \quad a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p}}$

$* Si \ a \in R, a \geq 0, y \ \ n \in N, n \geq 2$

$n par, \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b^n = a \\ b \geq 0 \end{cases}$

$* Si \ a \in R, y \ n \in N, n \geq 2$

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Propiedades:

1) $a^m.a^p = a^{m+p}$

2) $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$

3) $\left(a^m\right)^p = a^{m.p}$

4) $(a.b)^n = a^n.b^n$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Aplicaciones:

Ejercicio 1: Relaciona cada expresión de la primera fila con la que resulte igual a ella en la segunda.

A	B	C	D	E
$6^5 \cdot 6^4$	$(6^3)^2$	$\frac{6^5}{6^4}$	$\frac{6}{6^2}$	$2^4 \cdot 3^4$

1/6	6^6	6^{20}	6^9	6^4	6^5	6	1	$6^{5/4}$	6^8

Ejercicio 2: Siempre que sea posible, expresa como una sola potencia:

a) $\frac{5^{3x}}{5^x}$ b) $\frac{4^{3x}.4^x}{4}$ c) $\frac{12^{x-1}.12^x}{12^{x-3}}$ d) $3^{4x} + 3^{2x}$ e) $\frac{15^{x-7}.15^{4-x}}{3^{-4}.(5^{-2})^2}$

Ejercicio 3: Reduce a potencias con igual base y agrupa:

a) $5^{2x-1}.25^{x}.125$

b) $2^{6x+3}8^{x+4}.16$

c) $64^{x+2}.16^{3x+1}$

d) $10^{5x}.1000$

e) $5^{4}.125^{x}.25^{6}$

f) $5^{x}:25^{2}$

g) $49^{x+3}:7^{-5x+4}$

Problemas:

1) La siguiente expresión nos da la temperatura T en °C, de un líquido luego de x minutos de haber sido calentado: $T(x) = 80 . 0{,}9^{x}$
   a) Halla la temperatura del líquido recién calentado.
   b) Completa el siguiente cuadro:

x	0	5	10	20	30	40	60
T(x)							

   c) Bosqueja el gráfico de la función T.
   d) ¿Cortará el gráfico de la función T al eje de las abscisas?
   e) ¿Puedes estimar los minutos que le llevará al líquido llegar a los 25°?

2) En un terreno, una hierba, crece salvaje.
   A partir del 1° de enero, cada día a las 6:00 hs se midió el área A, en m^2 de la superficie cubierta por la hierba y se vio que está dada por la expresión: $A(t) = 50 . 1{,}06^{t}$ siendo t el número de días transcurridos luego del 1° de Enero.
   a) Halla el área de la superficie cubierta por la hierba el primer día que se comenzó a medir.
   b) Completa el cuadro:

t	-30	-10	0	5	10	15	20
A(t)							

   c) Bosqueja el gráfico de la función A.
   d) ¿Qué representan los valores de t negativos?
   e) ¿Cuál sería el área cubierta dos meses antes de comenzar a medir?
   f) ¿Tiene raíces esta función?

Como verás, estamos trabajando con funciones que tienen base constante, positiva y distinta de 1 y exponente variable.
Por ejemplo: $f:f(x) = 2^{x}$, $g:g(x) = 5{,}5^{x}$, $h:h(x) = 10^{x}$, $i:i(x) = 0{,}5^{x}$, $j:j(x) = (1/5)^{x}$, $k:k(x) = (1/10)^{x}$

El dominio de estas funciones es R. Se llaman **FUNCIONES EXPONENCIALES**.

Actividades:

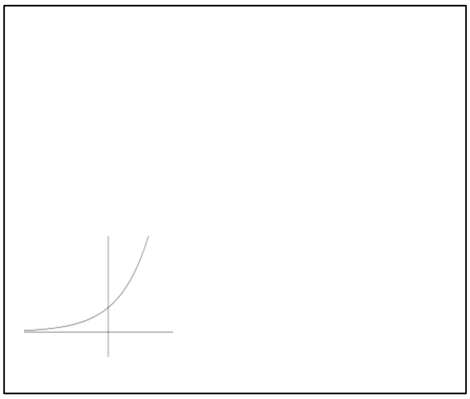
1) a) Representa gráficamente con geogebra, las funciones f, g y h en un mismo par de ejes.
   b) ¿Por qué punto pasan todos estos gráficos? ¿Cuál es la ordenada en el origen?
   c) ¿Cómo es el signo de las imágenes en cada una de ellas?
   d) ¿Son crecientes o decrecientes?
   e) ¿Tienen raíces?

2) a) Representa gráficamente con geogebra, las funciones i , j , k en un mismo par de ejes.
   Responde las mismas preguntas b), c) , d) , e) de la actividad 1.

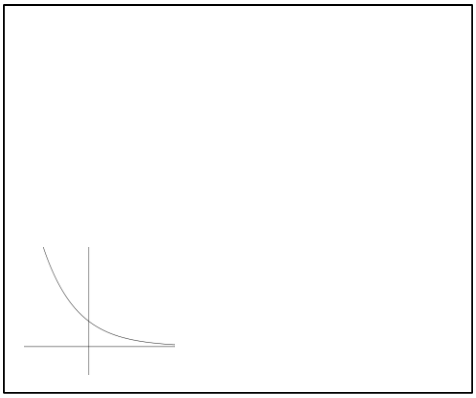
Generalizando:

Sea la función exponencial f : $f(x) = a^x$

Si a > 1



Si 0 < a < 1



DOMINIO: R

NO TIENE RAÍCES.

SIGNO DE f(x) + + + + + + + +

X

ORDENADA EN EL ORIGEN: 1 , PASA POR EL PUNTO (0 , 1)

ASÍNTOTA:

la recta de ecuación y = 0 es asíntota al gráfico de f

CRECIMIENTO:

Si a > 1, f es creciente y si 0 < a < 1, f es decreciente.

OBSERVA QUE: $a^m = a^p \Leftrightarrow m = p$

Ejercicios:

Ejercicio 4: Resuelve en R:

a) $13^{5x-3}=1$
b) $2^x = 128$
c) $2^{x+5} = 64$
d) $2^{2x+5} = 2^{3x+1}$
e) $4^{x+1} = 8^{1-3x}$
f) $25^3 = 125^{2x+1}$
g) $8^{-3x} = 16^{2x-5}$
h) $27^{x-2} = (1/3)^{-6x}$
i) $(1/10)^{x-3} = 100000^{2x-4}$

Ejercicio 5: Resuelve en R:

a) $\dfrac{6^5 \cdot 6^x}{36} = 6^9$
b) $\dfrac{5^7 \cdot 5^4}{5^x} = 25$
c) $3^{x-1} = \dfrac{1}{9}$
d) $7^x = \left(\dfrac{1}{7}\right)^{2x-6}$
e) $8^x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{3x-1}$
f) $2^{x^2-4x+3} \cdot 2^{4x-7} = 1$
g) $5^{-2x^2-4} = \left(5^{(x^2-4)}\right)^2$
h) $16^x = 4^{x^3} \cdot 8^{x^2-2x}$
i) $\left(\frac{1}{10}\right)^{2x} . 100^{3x+1} = 1000^x$
j) $25^{x^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} (5^2)^3$
k) $2^{x^2-3} + 2^{x^2-3} = \frac{1}{2}$
l) $\frac{10^{3x}.(10^2)^{x-4}}{5^{x-3}.2^{x-3}} = \frac{1}{10^{x^2}}$

Ejercicio 6:

Muchos tipos de seres unicelulares se reproducen por bipartición, es decir, cuando pasa un cierto tiempo, el individuo se parte y da lugar a dos individuos. Cada uno de ellos a s vez transcurrido un cierto tiempo, repite el proceso. Partiendo de que en el tiempo inicial (0) existía un solo individuo y si se reproducen diariamente, cuántos individuos habrá al pasar:

a) 1 día b) 2 días c) 3 días d) 4 días e) t días.

Ejercicio 7:

En una fábrica se compró una máquina a U$S 10000. El valor de reventa de dicha máquina al pasar un año es U$S 5000. Luego de dos años es U$S 2500. Luego de 3 años el valor de reventa es U$S 1250 y así sucesivamente cada año pierde la mitad de su valor. Halle una fórmula que exprese el valor de reventa en función del tiempo.

Ejercicio 8:

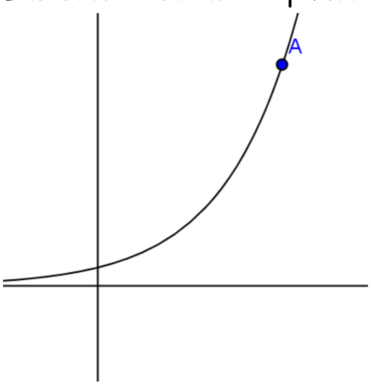
El valor de un auto decrece cada año según la función $V(t) = 26000.b^t$, donde V es el valor del auto en dólares, t es el número de años luego de comprado y b es una constante.

a) Halla el valor del auto en el momento de comprado.
b) Luego de un año, el valor del auto era 22100 dólares. Halla el valor de b.

Ejercicio 9:

El siguiente es el gráfico de una función exponencial $f : f(x) = a^x$

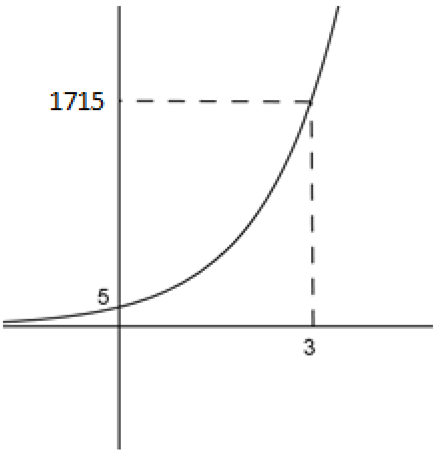
Las coordenadas del punto A son (2 ; 144). (Gráfica no a escala)



Halla el valor de a.

Ejercicio 10:

El siguiente es el gráfico de una función exponencial $g : g(x) = m . a^x$ (Gráfica no a escala)



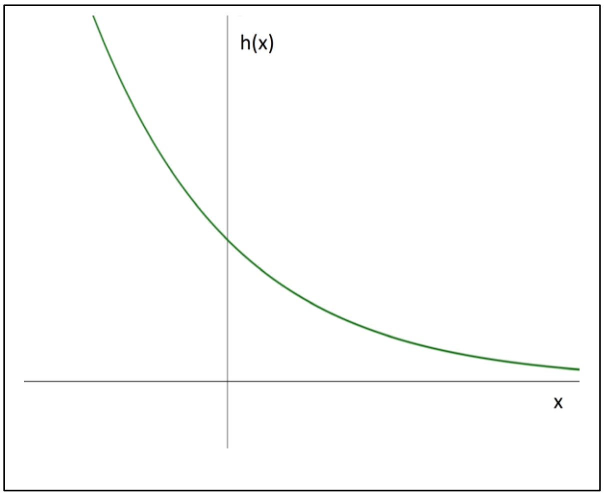
Halla g(x).

Ejercicio 11: El siguiente es el gráfico de una función exponencial $h: h(x) = p.c^x$

Se sabe que $h(-1) = 63$

Halla los valores de p y c.

La gráfica no está a escala.



Ejercicio 12:

Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificar:

a) $\exists\, x \in R \;/\; 3^x < 0$ b) $3^x > 0 \quad \forall\, x \in R$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0 \quad \forall\, x \in R$ d) $2^x > 1 \quad \forall\, x \in R$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1 \quad \forall\, x \in R$ f) Si $m > p \Rightarrow 2^m > 2^p$

g) Si $m > p \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^m > \left(\frac{1}{3}\right)^p$ h) Si $3^m > 3^p \Rightarrow m > p$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^m > \left(\frac{1}{2}\right)^p \Rightarrow m > p$

Ejercicio 13:

Resolver: a) $5^x > 125$ b) $0{,}23^x > 0{,}0529$ c) $3^x < \frac{1}{9}$

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$ e) $\frac{3^{x^2}}{81^{x}} > \left(\frac{1}{27}\right)^{4-x}$ f) $\left(2^{x}\right)^{3}.5^{3x} \geq (0{,}1)^{x-16}$

g) $2^{x^2-1} > 1$

Ejercicio 14:

Resolver en R:

a) $3^{x-1} = \frac{1}{9}$ b) $2^{x^2-4x+3} \cdot 2^{4x-7} = 1$ c) $16^{x} = 4^{x^2} \cdot 8^{x-2}$

d) $8^{x} = (0{,}25)^{3x-1}$ e) $9^{x^2+1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} = 27^{\frac{-2x}{3}}$ f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}.\frac{16^{x+1}}{8^{2x-3}} = 128$

g) $2^{x} - 9.2^{x} + 4 = 0$ h) $9^{x} + 4.9^{x} - 15 = 0$