MATEMÁTICA NÚCLEO COMÚN 5to.B Liceo 10

LOGARITMO Y FUNCIÓN LOGARÍMICA:

Definición 1: LOGARITMO.

Dados $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$.

a es el logaritmando

b es la base del logaritmo

c es el LOGARITMO.

<u>Ejercicio 1.</u>

Calcula aplicando la definición:

a) $\log_2 8 =$

b) $\log_4 4 =$

c) $\log_{81} 1 =$

d) $\log_7 343 =$

e) $\log_{\frac{1}{9}} 9 =$

f) $\log_3\left(\dfrac{1}{27}\right) =$

<u>Propiedad</u>: **CAMBIO DE BASE**

Si los números reales a , b y c cumplen las condiciones de existencia de los logaritmos, se cumple que:

$$\boxed{\log_a^b = \frac{\log_c^b}{\log_c^a}}$$

Esto es muy útil ya que te permite usar la calculadora para calcular logaritmos de cualquier base.

<u>Ejercicio 2.</u>

a) Calcula los logaritmos del ejercicio 1 con tu calculadora, verificando los resultados que obtuviste.

b) Calcula los siguientes logaritmos usando tu calculadora, aproxima los resultados con 2 cifras decimales:

i) $\log 16 =$ ii) $\log_4 12 =$ iii) $\log_5 3 =$

<u>Ejercicio 3.</u>

Con el auxilio de tu calculadora, resuelve las siguientes ecuaciones (aproxima con dos cifras decimales):

a) $5^x = 2$

b) $2^{3x-1} = 3$

c) $6^{x+3} = -1$

d) $7^{2x} = 0$

e) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2} = 5$

f) $2^{x^2} = \dfrac{1}{3}$

Ejercicio 4. ¿Para qué valores de x existen los siguientes logaritmos?

a) $\log_{12}(3x-2)$
b) $\log(5x^2 - x)$
c) $\log_3\left(\frac{1-2x}{3x+5}\right)$
d) $\log\left(\frac{-x-4}{x}\right)$
e) $\log_6(x^3 - x^2 - 9x + 9)$

Ejercicio 5.

a) $\log_7(6x+1) = 0$
b) $\log_{17}(x^2 - 3x - 9) = 0$
c) $\log_8(x^2 - 12x) = 2$
d) $\log_4(x-1) = \frac{1}{2}$
e) $\log_3\left(\frac{8x+1}{x}\right) = 1$
f) $\log_7\left(\frac{x^2-3x}{2x-4}\right) = 0$
g) $\log\frac{x(3x-1)}{27-x} = 0$
h) $\log_6(x^3 - 13x^2 + 48x) = 2$

Siempre que resuelvas una ecuación logarítmica debes hallar antes para qué valores de x tiene sentido la expresión.

Definición 2: FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

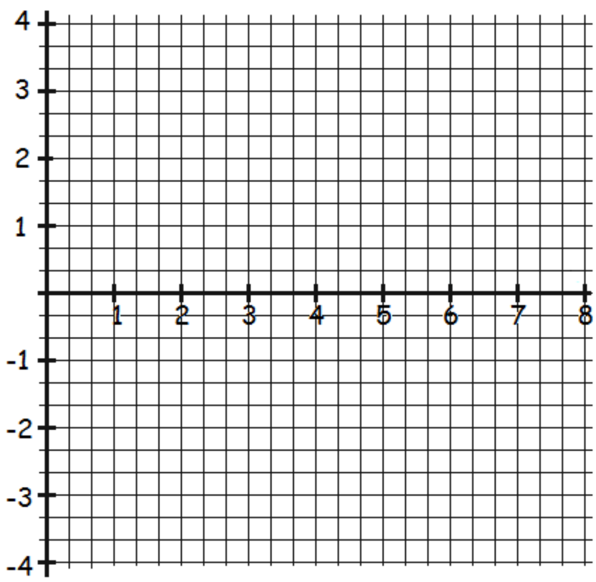
Dado $b > 0$, $b \neq 1$, llamamos FUNCIÓN LOGARÍTIMICA a toda función f de dominio R^+ tal que $f(x) = \log_b x$.

Ejercicio 6.

Sea la función logarítmica f tal que $f(x) = \log_2 x$.

a) Completa la siguiente tabla y a partir de ella grafica la función.

x	f(x)
1/8	
1/4	
1/2	
1	
2	
4	
8	



b) Analiza el signo de f(x).

Actividades:

1) Trabajando con el software geogebra representa gráficamente en un mismo par de ejes las siguientes funciones logarítmicas:
   g:g(x) = $\log_3 x$
   h:h(x) = $\log_{5,6} x$
   i:i(x) = $\log_{10} x$

2) En otro par de ejes representa gráficamente con geogebra las siguientes funciones logarítmicas:
   j:j(x) = $\log_{0.5} x$
   k:k(x) = $\log_{(1/3)} x$
   l:l(x) = $\log_{0.4} x$

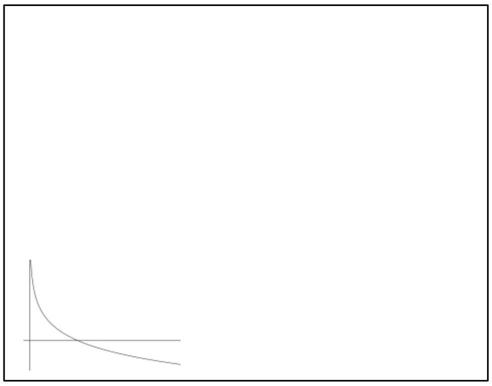
3) Mirando los gráficos anteriores responde:
   a) ¿Por qué punto pasan todos estos gráficos?
   b) ¿Cómo es el signo de las imágenes en cada una de las funciones?
   c) ¿Son funciones crecientes o decrecientes?
   d) ¿Cuál es la raíz?

Generalizando:

Sea la función logarítmica f : f(x) = $\log_b x$

Si b > 1

Si 0 < b <1



DOMINIO : R^+

TIENEN RAÍZ 1

COMPLETA EL esquema del signo de f(x) en cada caso:

b>1

$\longrightarrow x$

0<b<1

$\longrightarrow x$

PASAN POR EL PUNTO (1 , 0)

ASÍNTOTA:

La recta de ecuación x = 0 es asíntota al gráfico de f.

CRECIMIENTO:

Si b > 1, f es creciente y si 0 < b < 1, f es decreciente.

OBSERVA QUE: $\log_b m = \log_b p \quad \Leftrightarrow \quad m = p$

Ejercicio 7:

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2(x^2+4) = \log_2(5x)$

b) $\log_5(3x-6) = \log_5(9x)$

c) $\log_{1/2}(x^2-4x) = \log_{1/2}(-2x+3)$

ALGUNAS PROPIEDADES MAS, (en condiciones de existencia):

1. $c \log_b a = \log_b a^c$

2. $\log_b a + \log_b c = \log_b (a \cdot c)$

3. $\log_b a - \log_b c = \log_b \left(\frac{a}{c}\right)$

4. $\log_a b^c = c.\log_a b$

Ejercicio 8.

Escribe los siguientes logaritmos como un solo logaritmo:

a) $\log_5 13 + \log_5 6 - \log_5 3$ b) $\log 14 + 3\log 4$ c) $3\log_{11} 20 - 3\log_{11} 5$

Ejercicio 9.

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x + \log_2 (3x+5) = 1$

b) $\log_5(x+2) + \log_5(2x-1) = 2$

c) $\log_3 (8x+1) - \log_3 x = 1$

d) $\log_7(x^2-3x) - \log_7(2x-4) = 0$

e) $log_4^{(x^2+3)} - log_4^{(x+3)} = \frac{1}{2}$

f) $log_4^{(x+5)} + log_4^{(x+4)} = -log_{1/4}^{2}$

g) $\log_5(3x+7) - 2\log_5(x+1) = 0$

h) $2\log_2 x - \log_2(3x-4) = 1$

i) $2\log x - \log(10x) = -1$

Aplicaciones:

Escala Richter

En la escala Richter, la magnitud *R* de la intensidad I de un sismo está dada por:

R = log (I / I $_0$), donde I $_0$ es cierta intensidad mínima.

(a) Si la intensidad de un sismo es 1000 I $_0$, encuentra *R*.
(b) Expresa I en términos de *R* e I $_0$.

Zona sísmica en el oeste

En la región occidental de Estados Unidos, el área A (en mi ^{2}) afectada por un sismo se relaciona con la magnitud R del fenómeno mediante la fórmula: R = 2,3log(A+3000)-5,1.

Despeja A en términos de R.

Crecimiento infantil

El modelo Count es una fórmula que sirve para pronosticar la estatura de los preescolares. Si h es la estatura (en cm) y t es la edad (en años), entonces h = $70{,}228 + 5{,}104t + 9{,}222\log_3^t$ para $\frac{1}{4} \le t \le 6$.

Pronostica la estatura de un niño normal de 2 años de edad.

Ejercicio 10.

Sea la función logarítmica f:f(x) = $\log_a x$

Halla su base sabiendo que f(64) = 3.

Ejercicio 11.

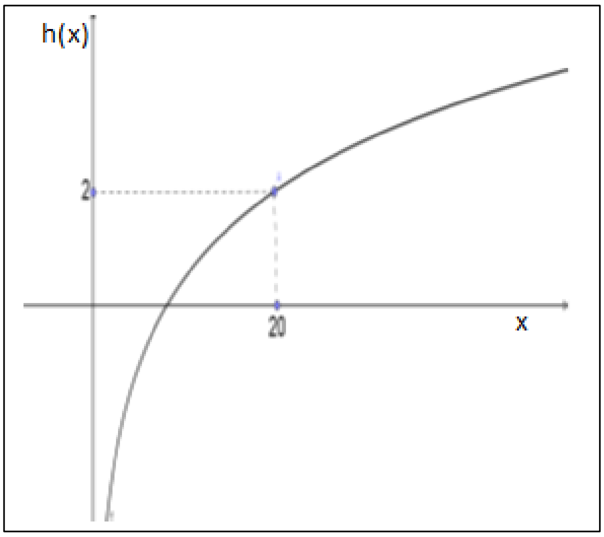
Sea la función logarítmica g:g(x) = $\log_2(mx)$

Halla el valor de m sabiendo que el gráfico de g pasa por el punto de coordenadas (9 , 2).

Ejercicio 12:

El gráfico adjunto es el de la función logarítmica h:h(x)= $\log(ax)$

Halla el valor de a.



Ejercicio 13

Resuelve en R:

a) $\log_5^{(x+2)} + \log_5^{(2x-1)} = 2$ b) $\log_4^{(3x+1)} = \log_2^{(x-1)}$ c) $\log_3\left(x^2-1\right) - \log_3(x+1) = 2$

d) $\log_4(-2x-2) - \log_4\left(x^2-8\right) = \log_4 4$ e) $\log_{16}(14x+14)^2 + \log_{1/4} x = \log_5 25$

f) $\log_3(x+1) + \log_{27}(3x+2)^3 = 2\log_9 2$ g) $2.\log_3(2x+5) - \log_3 \frac{1}{9} = \log_2 16$