PRÓLOGO

presente libro de texto fue creado con la intención de servir como soporte al curso de descriptiva que se imparte en nuestro bachillerato. Pensado bajo la óptica del curso ble que en la actualidad enseñan los profesores de segundo ciclo, es que se han o los contenidos y se le ha dado un enfoque alternativo a la estructura tradicional del ara la asignatura. Comenzamos el libro con un capítulo 0 denominado "Propiedades ría del espacio" con la finalidad de proporcionar una base firme sobre la cual el curso; en él se enuncian 68 propiedades que nos servirán luego para fundamentar ciones relacionadas con la geometría descriptiva, y además nos brinda la posibilidad nizar el grado de conocimientos de la clase con respecto a este tema, impartido en riores.

el capítulo 1 se estudian los poliedros, se los clasifica y se trabaja fundamentalmente de proyección aún) con el tetraedro regular, el cubo y el octaedro regular, definiendo fundamentales y enunciando sus principales propiedades. Se presentan ejemplos ejercicios orientados a hallar las líneas fundamentales de cada poliedro, conocido un cualquiera de él. En el capítulo 2 se introducen los planos de proyección y se con la representación de puntos, abordando desde un principio la representación de regulares en posiciones particulares y con la técnica del modelado alámbrico. El alámbrico es uno de los tres modelados de objetos en 3 dimensiones que utilizan e los programas de modelados de sólidos para computadoras, y representa solamente s y aristas de los poliedros sin considerar la superficie de las caras, obviando las as y ocultas y facilitando las construcciones. Luego de abordado el capítulo 9 de os, se comienza con la representación de modelos de superficie, en los cuales de ahí en más la representación de aristas vistas y ocultas en los sólidos. En el 0 de representación de sólidos con elementos sobre planos cualquiera oblicuos, la temática de las secciones planas, de gran utilidad para la representación de regulares. En el capítulo 11 se introduce el tema de las condiciones angulares a través os circulares rectos, considerándose las condiciones angulares simples entre rectas y tre planos y planos, y entre rectas y rectas, como así también toda la gama de es angulares dobles, que se desprenden de las consideraciones que surgen al resolver na de trazar una recta que forme ángulos dados con dos planos dados. En el último e resuelve un problema de examen que da una idea de cómo abordar este tipo de y se incluye además una amplia colección de ejercicios de examen que abarcan sobre pirámides y prismas, además de los clásicos sobre poliedros regulares.

ha puesto especial énfasis en la resolución en el depurado de métodos y entos, incluyéndose alrededor de 80 ejemplos y aplicaciones resueltas como también ta de más de 200 ejercicios para resolver.

Walter Fernández Val

ÍNDICE TEMÁTICO

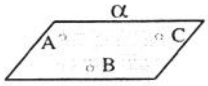
Capítulo 0
PROPIEDADES DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO

1. INTRODUCCIÓN

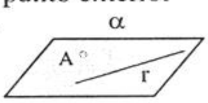
Este capítulo de introducción tiene como finalidad la revisión de definiciones, propiedades y conceptos de geometría del espacio, que serán utilizados en el desarrollo del curso. Al final del capítulo se encuentran ejemplos resueltos y se propone una serie de ejercicios. En lo sucesivo, cuando sea necesario referirnos a alguna de estas propiedades de geometría del espacio, lo haremos con la denominación "propiedad G.E. ....".

2. DETERMINACIÓN DE RECTAS Y PLANOS

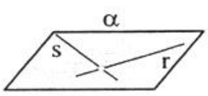
➢ 1. Tres puntos no alineados determinan un plano.



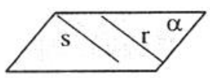
➢ 2. Una recta y un punto exterior determinan un plano.



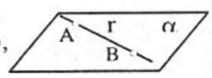
➢ 3. Dos rectas secantes determinan un plano



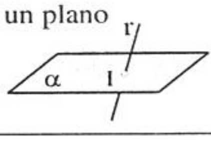
➢ 4. Dos rectas paralelas determinan un plano.



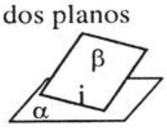
➢ 5. Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, entonces la recta que los contiene, está incluida en el plano.



➢ 6. La intersección de un plano y una recta secante es un punto.

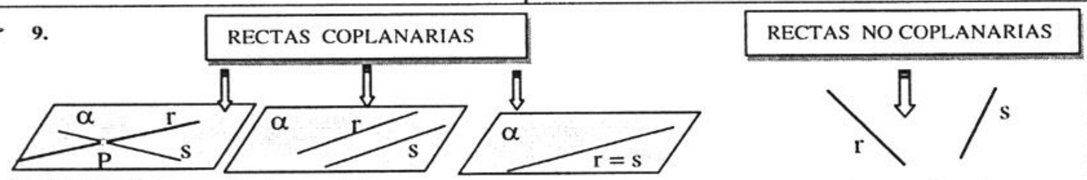


➢ 7. La intersección de dos planos secantes es una recta.



➢ 8. Se denominan **rectas alabeadas** o **rectas que se cruzan**, a aquellas que cumplen que su intersección es vacía, y tal que ningún plano las contiene a ambas.

➢ 9.



Rectas secantes $r \cap s = \{ P \}$

Rectas paralelas disjuntas $r \cap s = \emptyset$

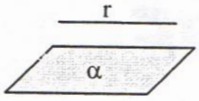
Rectas paralelas coincidentes $r = s$

Rectas alabeadas $r \cap s = \emptyset$

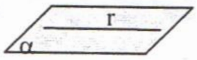
3485

3. PARALELISMO ENTRE RECTAS Y PLANOS

➢ **10. Definición :** Una recta es paralela a un plano, si su intersección es vacía, o si está incluida en él.

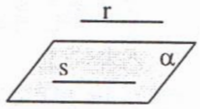


$r \cap \alpha = \emptyset$

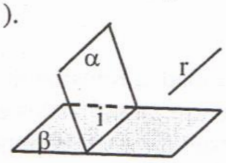


$r \subset \alpha$

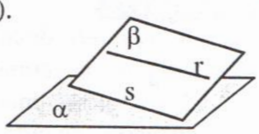
➢ **11.** La condición necesaria y suficiente para que una recta sea paralela a un plano es que exista en dicho plano una recta paralela a ella



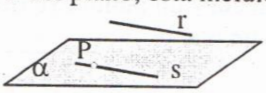
➢ **12.** Si una recta (r) es paralela a dos planos secantes α y β, entonces es paralela a su intersección (i).



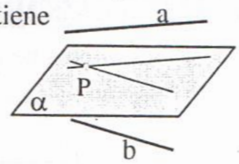
➢ **13.** Si una recta (r) es paralela a un plano α, todo plano β que incluya a la recta (r) y corte a α, lo hace según una recta (s), paralela a (r).



➢ **14.** Si una recta (r) es paralela a un plano α, toda recta (s) paralela a ella por un punto P del plano, está incluida en él.



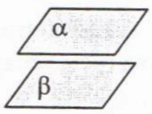
➢ **15.** Dado un punto P, existe y es único el plano α que lo contiene y es paralelo a dos rectas que se cruzan (a) y (b).



4. PARALELISMO ENTRE PLANOS

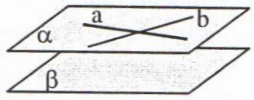
➢ **16. Definición :**
Dos planos son paralelos, si su intersección es vacía, o si son coincidentes.


$\alpha = \beta$

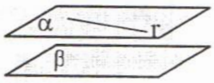


$\alpha \cap \beta = \emptyset$

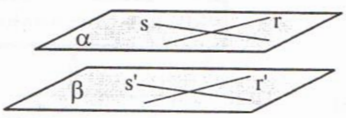
➢ **17.** La condición necesaria y suficiente para que dos planos α y β sean paralelos, es que uno de ellos incluya dos rectas secantes (a) y (b) que sean paralelas al otro plano.



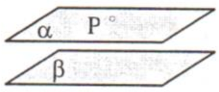
➢ **18.** Si dos planos son paralelos, toda recta (r), incluida en uno de ellos, es paralela al otro.



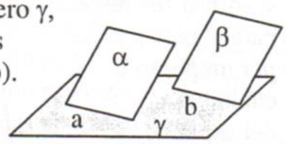
➢ **19.** Si un plano incluye dos rectas secantes, paralelas a otro par de rectas secantes incluidas en otro plano, entonces los planos son paralelos.



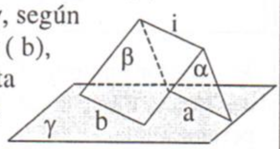
➢ **20.** Dado un punto P y un plano β, existe y es único el plano α que contiene a P y es paralelo a β.



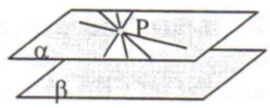
➢ **21.** Dos planos paralelos α y β cortan a un tercero γ, según dos rectas paralelas (a) y (b).



➢ **22.** Si dos planos secantes α y β cortan a un tercero γ, según rectas paralelas (a) y (b), se cumple que la recta intersección (i) entre los planos, es paralela a estas rectas .



➢ **23.** El lugar geométrico de las rectas paralelas a un plano β por un punto P del espacio, es el plano α que incluye a P y es paralelo a β.



➢ **24.** La relación "paralelismo entre rectas" en el espacio es una relación de equivalencia, es decir que cumple las propiedades idéntica, recíproca y transitiva :

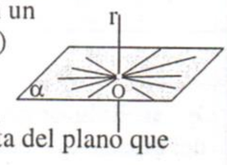
1. $r \parallel r$
2. $r \parallel s \Rightarrow s \parallel r$
3. $r \parallel s\,,\ s \parallel t \Rightarrow r \parallel t$

➢ **25.** La relación paralelismo entre planos es una relación de equivalencia, es decir que cumple las propiedades idéntica, recíproca y transitiva:

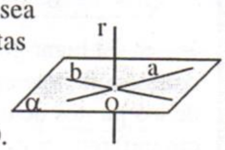
1. $\alpha \parallel \alpha$
2. $\alpha \parallel \beta \Rightarrow \beta \parallel \alpha$
3. $\alpha \parallel \beta\,,\ \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$

5. PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS Y PLANOS

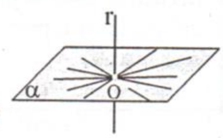
➢ **26. Definición**: Dada una recta (r) y un plano α que se cortan en un punto O, decimos que (r) es perpendicular a α, si sólo si, (r) es perpendicular a toda recta del plano que pase por O



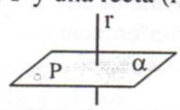
➢ **27.** La condición necesaria y suficiente para que una recta (r) sea perpendicular a un plano α, es que ésta sea perpendicular a dos rectas secantes (a) y (b) de dicho plano, en su punto de intersección O.



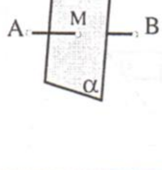
➢ **28.** El lugar geométrico de las perpendiculares a una recta (r) por un punto O de ella, es el plano α perpendicular a (r) por O



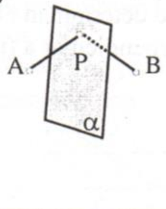
➢ **29.** Dados un punto P y una recta (r), existe y es único, el plano α, perpendicular a la recta y que incluye al punto.



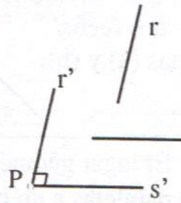
➢ **30. Definición de plano mediatriz**
Dados dos puntos A y B, se denomina plano mediatriz del segmento $\overline{AB}$, al plano perpendicular al mismo, por su punto medio.



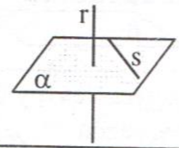
➢ **31.** El lugar geométrico de los puntos P del espacio, que equidistan de dos puntos dados A y B, es el plano α mediatriz del segmento $\overline{AB}$.



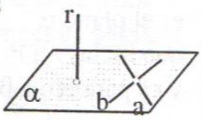
➤ 32. **Definición de rectas ortogonales**
Dos rectas (r) y (s) son ortogonales (r $\perp$ s), si sólo si sus respectivas paralelas (r') y (s') por un punto P cualquiera del espacio, resultan perpendiculares.



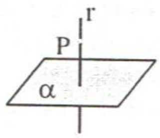
➤ 33. Si una recta (r) es perpendicular a un plano α, entonces es ortogonal con toda recta (s), incluida en dicho plano.



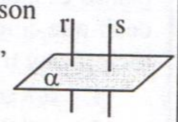
➤ 34. Si una recta (r), es ortogonal a dos rectas secantes (a) y (b) de un plano α, entonces, la recta es perpendicular al plano.



➤ 35. Por un punto P, existe una única recta (r), perpendicular a un plano α.

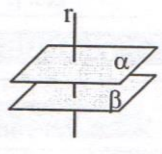


➤ 36. Si dos rectas (r) y (s) son perpendiculares a un plano α, entonces son paralelas entre sí.



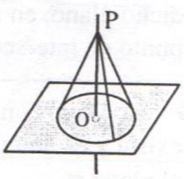
➤ 37. Si dos rectas (r) y (s) son paralelas, y una de ellas es perpendicular a un plano α, entonces la otra recta también es perpendicular al plano.

➤ 38. Si dos planos α y β son perpendiculares a una misma recta (r), entonces son paralelos entre sí.

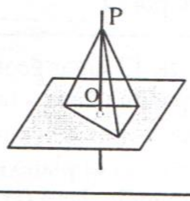


➤ 39. Si dos planos α y β son paralelos, y uno de ellos es perpendicular a una recta (r), entonces el otro plano también es perpendicular a la recta

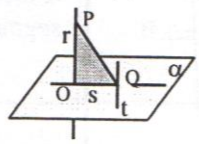
➤ 40. El lugar geométrico de los puntos del espacio, que equidistan de los puntos de una circunferencia, es la recta (p), perpendicular al plano de la circunferencia, por su centro.



➤ 41. El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los vértices de cualquier polígono inscriptible, es la recta perpendicular al plano del polígono, por su circuncentro.

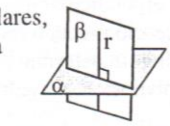


➤ 42. *Teorema de las tres perpendiculares*
Si una recta (r) es perpendicular a un plano α, y por su pie O, se traza una perpendicular (s) a una recta (t) cualquiera incluida en el plano ; se cumple que la recta que determinan el punto Q de intersección de (s) con (t), con cualquier punto P de (r), es perpendicular a (t).

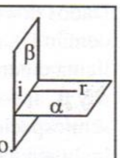


6. PERPENDICULARIDAD ENTRE PLANOS

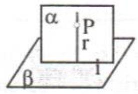
➢ 43. **Definición**
Dos planos son perpendiculares, si uno de ellos contiene una recta perpendicular al otro.



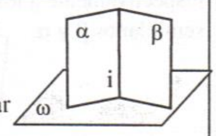
➢ 44. Si dos planos α y β son perpendiculares, toda recta (r) incluida en uno de ellos, y perpendicular a su intersección (i), es perpendicular al otro plano.



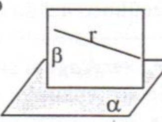
➢ 45. Si dos planos α y β son perpendiculares, la perpendicular (r) trazada por un punto P de α al plano β, está incluida en α.



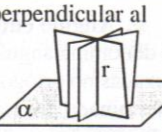
➢ 46. Si un plano ω, es perpendicular a dos planos α y β secantes , entonces es perpendicular a su intersección (i).



➢ 47. Para toda recta (r) no perpendicular a un plano α, existe y es único el plano β que la contiene, y es perpendicular al primero.

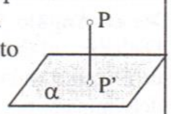


➢ 48. Si una recta (r) es perpendicular al plano α, existen infinitos planos que la contienen, y son perpendiculares a α.

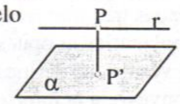


7. DISTANCIAS Y ÁNGULOS

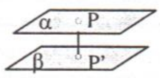
➢ 49. **Distancia de un punto a un plano**
Se denomina distancia de un punto P a un plano α, a la distancia entre dicho punto P, y el punto de intersección P' de la perpendicular al plano por P, con α.



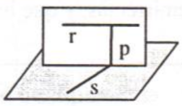
➢ 50. **Distancia entre una recta y un plano paralelo**
Se define distancia entre una recta (r) y un plano paralelo α, a la distancia entre un punto P cualquiera de la recta y el plano



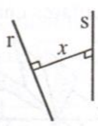
➢ 51. **Distancia entre planos paralelos**
Se denomina distancia entre dos planos paralelos, a la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro plano.



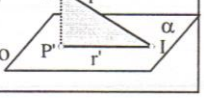
➢ 52. **Perpendicular común a dos rectas que se cruzan**
Para todo par de rectas (r) y (s) que se cruzan, existe y es única la recta perpendicular (p), a ambas.



➢ 53. **Distancia entre dos rectas cruzadas**
Se denomina distancia entre dos rectas cruzadas, a la longitud "x" del segmento determinado por los puntos de corte de ambas rectas con su perpendicular común.

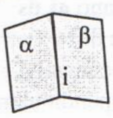


➢ 54. **Ángulo entre recta y plano**
Si una recta no es perpendicular, ni paralela a un plano, se denomina ángulo entre la recta y el plano, al ángulo agudo determinado por la recta y su proyección ortogonal sobre el plano. La proyección (r') queda determinada por el punto I, intersección de (r) con el plano, y el punto P' de intersección de la perpendicular a α, por un punto P cualquiera de (r), con α. Si r ⊥ α, entonces el ángulo es recto



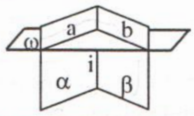
➤ **55. Diedro convexo**

Dados dos semiplanos α y β de borde común (i), no opuestos ni coincidentes, se llama diedro convexo de caras α y β, al conjunto intersección de los semiespacios de borde los planos que incluyen a α y β, y que contienen respectivamente a los semiplanos β y α.



➤ **56. Rectilíneo de un diedro**

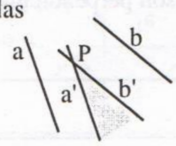
Dado un diedro de caras α y β, y un plano ω perpendicular a su arista (i) llamamos sección recta o rectilíneo del diedro al ángulo determinado por la intersección del plano con el diedro.



➤ 57. Si por un punto cualquiera de la arista (i) de un diedro, se trazan semirrectas perpendiculares a ella incluidas en las caras del diedro, éstas determinan un rectilíneo del diedro.

➤ **58. Ángulo entre dos rectas cruzadas**

Se denomina ángulo entre dos rectas cruzadas no ortogonales, al ángulo agudo determinado por las paralelas a ellas por un punto P cualquiera del espacio.
Si las rectas cruzadas son ortogonales, entonces forman ángulo recto.

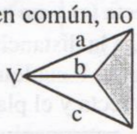


➤ **59. Ángulo entre dos planos secantes**

Se denomina ángulo entre dos planos secantes α y β, no perpendiculares, al rectilíneo agudo de uno de los diedros determinados por ellos.
Si los planos son perpendiculares, se dice que forman ángulo recto.

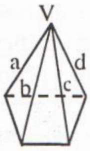
➤ **60. Triedro convexo**

Dadas tres semirrectas de origen común, no coplanarias ni opuestas por el vértice, se define triedro convexo, a la intersección de los semiespacios cuyos bordes están determinados por dos de las semirrectas, y que incluyen a la restante.



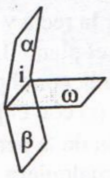
➤ **61. Ángulo poliedro convexo**

Dadas en un orden, tres, o más semirrectas de origen común, tales que el plano determinado por dos semirrectas consecutivas, deja en un mismo semiespacio a las restantes, se denomina ángulo poliedro convexo a la intersección de todos los semiespacios cerrados, así determinados.



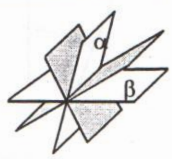
➤ **62. Semiplano bisector**

Dado cualquier diedro convexo de caras α y β y de arista (i), se denomina semiplano bisector ω, al semiplano interior de borde (i) que determina con las caras del mismo dos diedros congruentes.



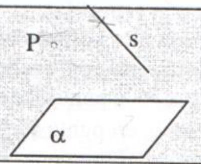
➤ 63. El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de las caras de un diedro convexo, es el semiplano bisector del mismo.

➤ 64. Los semiplanos bisectores de los diedros formados por dos planos secantes α y β, se hallan incluidos en dos planos perpendiculares entre sí

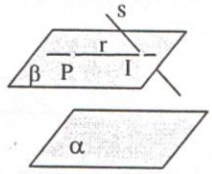


EJEMPLO 1

Por un punto P exterior a un plano α dado, trazar una recta (r) que corte a otra recta (s) dada y sea paralela al plano α.
Explicar un procedimiento y construir un croquis.

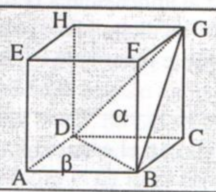


Procedimiento :
1) Por el punto P se traza un plano β paralelo a α
2) Hallamos la intersección de β con la recta (s). Sea $I = \beta \cap s$
3) La recta PI es la recta solución pues corta a (s) y es paralela al plano α pues como $\alpha \cap \beta = \varnothing$ y PI se encuentra incluida en β, entonces $PI \cap \alpha = \varnothing$ de donde resulta $PI \parallel \alpha$.

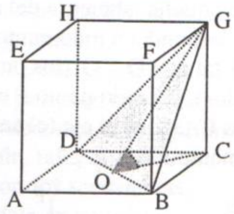


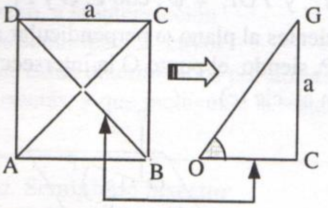
EJEMPLO 2

Sea el cubo de la figura ABCDEFGH y los planos α = (B,D,G) y β = (A,B,C). Construir en verdadera magnitud a partir de una arista de cubo cualquiera "a", un rectilíneo del diedro de caras α y β



Por un punto de la arista del diedro de caras α y β (el punto medio O de la diagonal BD), trazaremos rectas perpendiculares a BD incluidas en las caras α y β
Estas rectas serán OC (las diagonales de un cuadrado se cortan perpendicularmente) y OG (mediatriz en el triángulo isósceles $\overset{\triangle}{BDG}$). El rectilíneo buscado será entonces $\widehat{GOB}$.



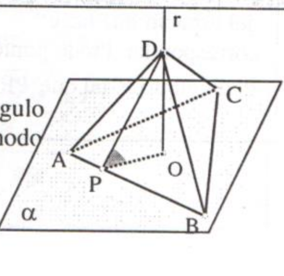


Para construirlo a partir de una arista "a", hallamos previamente la mitad de la diagonal del cuadrado ABCD y posteriormente se construye el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{GOC}$, del cuál conocemos $\overline{OC}$ y $\overline{GC}$ (arista), resultando el rectilíneo buscado $\widehat{GOC}$

EJEMPLO 3

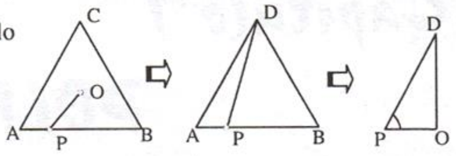
Sea un plano α y en él un triángulo equilátero $\overset{\triangle}{ABC}$ de centro O y lado *"x"*. Se considera un punto P perteneciente al segmento $\overline{AB}$, tal que $\overline{AP}=1/4\ \overline{AB}$. Por O se traza la perpendicular (r) al plano α, y sobre dicha recta se ubica un punto D, tal que $\overline{AD} = \overline{AB}$. Construir en verdadera magnitud el ángulo que forma la recta DP con el plano α.

Observemos que el ángulo pedido es el $\widehat{DPO}$, ya que la intersección de la recta con el plano es P, y O es el punto de intersección de la perpendicular por el punto D al plano, con éste. Para construir el ángulo solución, construiremos el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{DOP}$ del siguiente modo
1) Se construye el triángulo equilátero $\overset{\triangle}{ABC}$ a partir de un lado de longitud "x", y en él se halla el segmento $\overline{OP}$.



2) Como el punto D equidista de los vértices del triángulo, por hallarse situado en la perpendicular al plano por el circuncentro del triángulo, y considerando que AB = AD, se puede afirmar que el triángulo $\widehat{ABD}$ también es equilátero. En un triángulo igual al de la parte anterior hallamos el segmento $\overline{DP}$

3) Por último construimos el triángulo rectángulo DOP, del cuál conocemos el cateto OP y la hipotenusa DP. El ángulo solución es $\widehat{DPO}$



EJERCICIOS Grupo 1

1. Sea un cubo ABCDEFGH de centro O. Se consideran a M punto medio de $\overline{AC}$, y N de $\overline{EG}$, y a los planos $\alpha = (B,D,H,F)$ y $\beta = (A,C,G,E)$.
   - ❖ Indicar las posiciones relativas de la recta OG, respecto a las siguientes: a) EC, b)MH, c)AB, d)HF, e)AM,
   - ❖ Indicar las posiciones relativas de la recta ON, respecto a las siguientes: f)BF, g)FH, h)BC, i)HB, j)AD

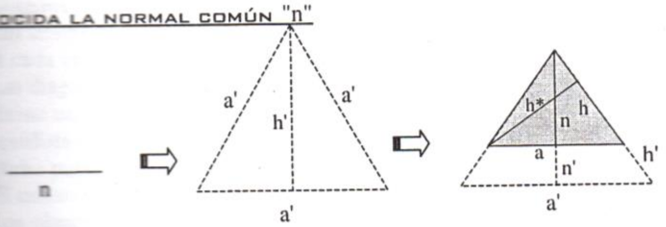
   En los casos de rectas secantes indicar punto de intersección y plano que determinan, en las rectas paralelas el plano determinado, y en el caso de rectas cruzadas justificar cuando sean ortogonales.
2. Se consideran dos rectas que se cruzan (m) y (n) y dos puntos $M \in m$ y $N \in n$. Sean $\alpha = (M , n)$ y $\beta = (N, m)$. Hallar $\alpha \cap \beta$
3. Dadas dos rectas que se cruzan ortogonales (a) y (b), y un punto exterior P, trazar por P una recta que corte a ambas.
4. Dadas tres rectas que se cruzan (a), (b) y (c), trazar una recta que corte a dos de ellas y sea paralela a la tercera.
5. Sean (a) y (b) dos rectas que se cruzan, y un punto P exterior. Determinar un plano paralelo a ambas rectas que pase por P.
6. Sean dos rectas paralelas (a) y (b), y un punto P exterior a ambas. Se consideran los planos $\alpha=(a,P)$ y $\beta =(b,P)$. Determinar la intersección de ambos planos.
7. Se considera un cuadrado ABCD y un plano α que no contiene al cuadrado. Determinar un punto P que equidiste de los vértices del cuadrado y pertenezca al plano.
8. Se considera un triángulo equilátero $\widehat{ABC}$ y M el punto medio de $\overline{BC}$. Por A se traza unas recta (r) perpendicular al plano que contiene al triángulo. Sea un punto cualquiera $P \in r$. Probar que $PM \perp BC$.
9. Dadas dos rectas (a) y (b) que se cruzan y un punto exterior P. Determinar una recta (r) que pase por P y sea ortogonal con (a) y (b).
10. Se considera un plano α que incluye un cuadrado ABCD de centro O, y de arista "a". Por O se traza una recta (r) perpendicular al plano, y en ella se considera un punto V tal que $\overline{OV} = a$. Sean los planos $\alpha = (A,B,C)$ y $\beta = (B,C,V)$, y $P \in \overline{AB}$ un punto tal que $\overline{AP}=1/2\ \overline{BP}$

    a) Construir en verdadera magnitud un rectilíneo del diedro de caras α y β.

    b)Construir en verdadera magnitud el ángulo que forma la recta VP con el plano α.

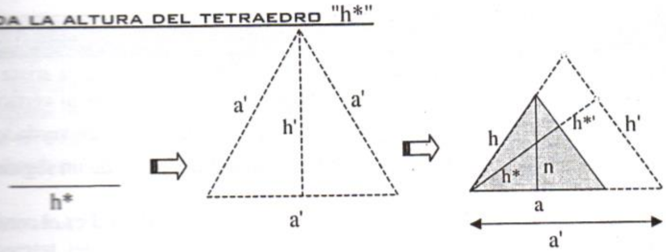
    c) Construir el ángulo que forman las rectas cruzadas PV y AD

CONOCIDA LA NORMAL COMÚN "n"



i) Partiendo de una arista arbitraria cualquiera "a' ", se construye un triángulo equilátero (punteado) de lado "a' " y se halla su altura "h' ".
ii) Se construye un triángulo isósceles de lados iguales " h' ", y el restante " a' ". En dicho triángulo se halla el segmento correspondiente a la normal común auxiliar " n' " (la altura correspondiente al vértice al cual concurren los lados iguales).
iii) Procediendo por semejanza, se superpone sobre " n' ", un segmento de longitud igual a la normal común "n", tal que uno de los extremos coincida con el vértice, y por paralelas se hallan las restantes magnitudes "a" , "h" y "h*".

CONOCIDA LA ALTURA DEL TETRAEDRO "h*"

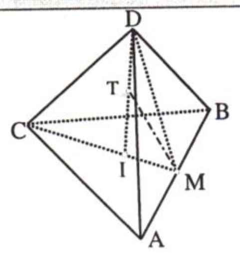


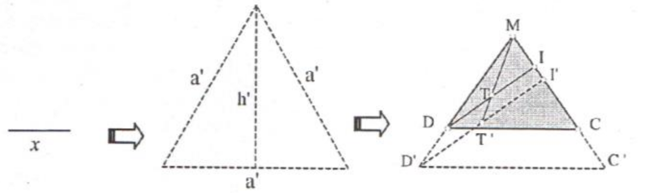
i) Partiendo de una arista arbitraria cualquiera "a' ", se construye un triángulo equilátero (punteado) de lado "a' " y se halla su altura "h' ".
ii) Se construye un triángulo isósceles de lados iguales " h' ", y el restante " a' ". En dicho triángulo se halla el segmento correspondiente a la altura del tetraedro auxiliar " h*' " .
iii) Procediendo por semejanza, se superpone sobre " h*' ", un segmento de longitud igual a la altura del tetraedro "h*", tal que uno de los extremos coincida con el vértice, y por paralelas se construye el triángulo sombreado que contiene las restantes magnitudes "a" , "h" y "n".

EJEMPLO 1

Se considera un tetraedro regular ABCD, con M punto medio de $\overline{AB}$, y T punto medio de la altura del tetraedro $\overline{DI}$. Hallar las líneas fundamentales del tetraedro en verdadera magnitud, conociendo el segmento $\overline{MT} = x$ cm

Procederemos por semejanza. En primer lugar se construye un triángulo auxiliar equilátero de arista " a' ", del cual se halla la altura " h' "(ver la página siguiente).





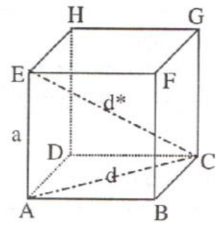
Posteriormente se construye el triángulo isósceles $\widehat{MD'C'}$, de lados iguales " h' " y el restante lado " a' " como indica la figura. Por D' se traza la perpendicular a MC' que la corta en I', y a continuación se ubica el punto medio T' del segmento $\overline{D'I'}$. Seguidamente se ubica el segmento $\overline{MT}$ de longitud dada "x", superponiéndolo sobre el segmento $\overline{MT'}$.
Por T se traza la paralela a D' I' que corta a MC' en I, y a MD' en D. Por D se traza la paralela a D'C' que corta a MC' en C. En el nuevo triángulo sombreado $\widehat{MDC}$ se obtienen las líneas buscadas: $\overline{DC}$ = a, $\overline{MD}$ = h, $\overline{DI}$ = h*, y $\overline{MN}$ = n, con N punto medio de $\overline{CD}$.

EJERCICIOS Grupo 2

1. Se considera un tetraedro regular ABCD. M es el punto medio de la arista AB y P un punto perteneciente a la altura del tetraedro correspondiente al vértice D, tal que $\overline{PD} = \frac{2}{3}\overline{ID}$, siendo I el centro de la cara ABC. Construir en verdadera magnitud todas las líneas fundamentales del tetraedro a partir de un segmento $\overline{PM}$ = 5 cm
2. En un tetraedro regular ABCD, I es el centro de la cara ABC y J es el centro de la cara BCD. Construir en verdadera magnitud la altura de cara del tetraedro partiendo de un segmento $\overline{IJ}$ = 4 cm
3. En un tetraedro regular ABCD, M es el punto medio de la arista $\overline{AB}$ y Q es un punto de la arista $\overline{CD}$ tal que $\overline{CQ} = \frac{1}{2}\overline{QD}$. Construir el segmento $\overline{MQ}$ en verdadera magnitud, si se sabe que la normal común del tetraedro mide 5 cm

5. HEXAEDRO REGULAR O CUBO

5.1 DEFINICIÓN: Se denomina cubo, al poliedro regular cuyas caras son seis cuadrados. Consta de 8 vértices y 12 aristas.

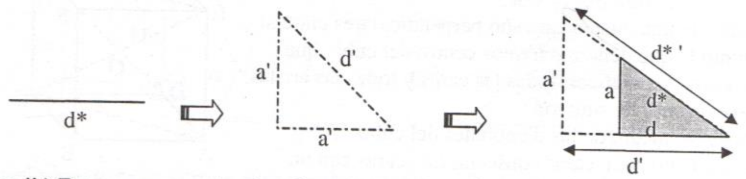


5.2 LÍNEAS FUNDAMENTALES

- Arista (a) ⇒ Es cada lado de los cuadrados que constituyen las caras.
- Diagonal de cara (d) ⇒ Es cada diagonal de los cuadrados que constituyen las caras. Son doce.
- Diagonal de cubo (d*) ⇒ Es cada segmento determinado por dos vértices que no pertenecen a caras comunes. Son cuatro.

sobre "d' ". Por paralelas se completa el nuevo triángulo rectángulo (sombreado), cuyo restante cateto será la arista "a", y la hipotenusa será " d* ".

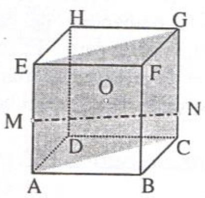
CONOCIDA LA DIAGONAL DE CUBO "d*"



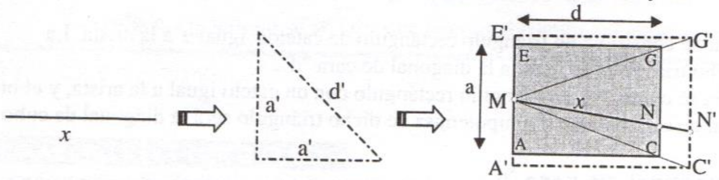
i) y ii) Estos pasos son iguales al caso anterior.
iii) i) Con extremo en uno de los vértices que determinan la hipotenusa, se superpone la diagonal de cubo d* conocida, sobre la "d* ' " auxiliar. Por paralelas se completa el nuevo triángulo rectángulo (sombreado), cuyos catetos serán la arista "a", y la diagonal de cara " d ".

EJEMPLO 2

Se considera un cubo ABCDEFGH, tal que M es el punto medio de la arista $\overline{AE}$ y N∈$\overline{CG}$, cumpliéndose que $4\overline{CN} = \overline{CG}$. Construir en verdadera magnitud las líneas fundamentales del cubo, partiendo de un segmento $\overline{MN} = x$ cm .



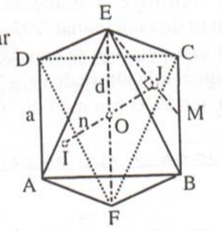
Procederemos por semejanza. En primer lugar se construye un triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados midan una arista "a' " cualquiera. La hipotenusa será la diagonal "d' ".
Posteriormente se construye el rectángulo A'E'G'C' de lados "a' " y "d' ". En uno de los lados menores ubicamos el punto medio M' y en el opuesto el punto N' tal que $4\overline{C'N'} = \overline{C'G'}$.
Sobre M'N' y haciendo coincidir M con M' se ubica el segmento $\overline{MN} = x$ cm. Por N se traza la paralela a C'G' que corta a $\overline{MG'}$ en G, y a $\overline{MC'}$ en C. Luego por paralelas se completa el rectángulo ACGE, en donde $\overline{AC}$ = d , $\overline{AE}$ = a y $\overline{EC}$ = d*.



EJERCICIOS Grupo 3

1. Se considera un cubo ABCDEFGH, y los puntos P, centro de la cara ABCD, y Q, centro de la cara CDHG, tal que $\overline{PQ}$ = 5 cm. Hallar la diagonal de cubo.
2. En el cubo ABDCEFGH de centro O, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y N el punto medio de $\overline{OG}$. Hallar las líneas fundamentales del cubo, si $\overline{MN}$ = 4 cm
3. Dado el cubo ABCDEFGH, se considera el punto R∈$\overline{AG}$, tal que $\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AG}} = \dfrac{3}{5}$, y S es el centro de la cara BCGF. Construir el segmento $\overline{RS}$ en verdadera magnitud, a partir de una diagonal de cubo de 6 cm.

6. OCTAEDRO REGULAR

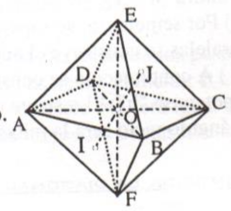


6.1 DEFINICIÓN: Se denomina octaedro regular, al poliedro regular cuyas caras son ocho triángulos equiláteros. Está conformado por seis vértices y doce aristas.

6.2 LÍNEAS FUNDAMENTALES

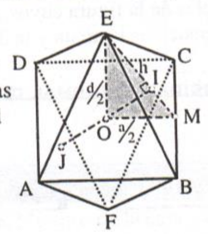
- Arista (a) ⇒ Es cada lado de los triángulos equiláteros que conforman las caras.
- Altura de cara (h) ⇒ Es cada altura de los triángulos que constituyen las caras. Son 24.
- Diagonal del octaedro (d) ⇒ Es cada segmento determinado por vértices no pertenecientes a una misma cara. Son tres.
- Normal común a dos caras opuestas (n) ⇒ Es cada segmento determinado por los centros de 2 caras opuestas (caras sin vértices comunes). Son cuatro.

6.3 PROPIEDADES



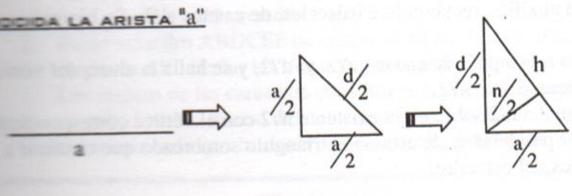
- A cada vértice concurren cuatro aristas.
- Las tres diagonales son perpendiculares entre sí, dos a dos.
- Existe un punto interior llamado centro del octaedro, que equidista de todos los vértices, de todas las aristas y de todas las caras. Dicho punto es centro de simetría del poliedro.
- Cada diagonal es perpendicular al plano determinado por las otras dos.
- El centro del octaedro es punto medio de las diagonales.
- El centro del octaedro es punto medio de cada normal común.
- Las caras opuestas son paralelas.
- La normal común es perpendicular a las caras que contienen sus extremos.
- Cada par de diagonales determina un cuadrado, llamado cuadrado diagonal.

6.4 CONSTRUCCIÓN DE LAS LÍNEAS FUNDAMENTALES DEL OCTAEDRO, CONOCIDA UNA DE ELLAS.



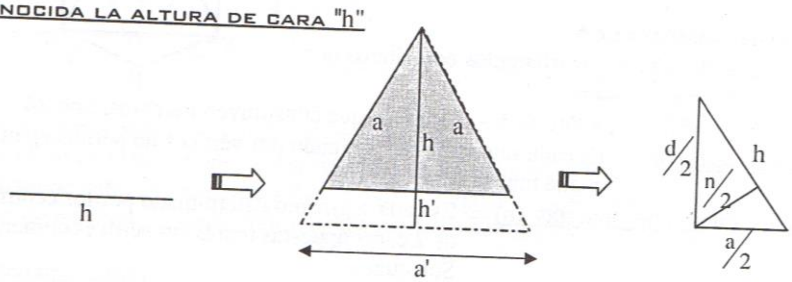
Observamos que en el triángulo rectángulo $\widehat{EOM}$ (O es el centro del octaedro y M punto medio de $\overline{BC}$), se encuentran todas las líneas fundamentales del poliedro: $\overline{EM}$ es la altura de cara, $\overline{EO}$ es la mitad de la diagonal del octaedro, $\overline{OM}$ es la mitad de la arista, y $\overline{OI}$ es la mitad de la normal común, siendo I el centro de la cara BCE. Basándonos en este triángulo es que realizaremos las siguientes construcciones.

CONOCIDA LA ARISTA "a"



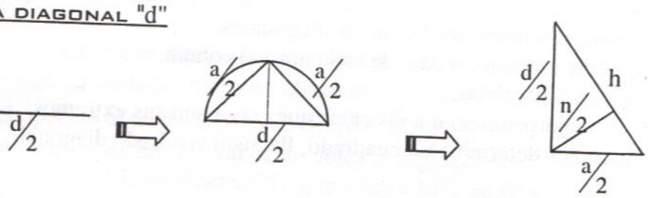
i) Se construye un triángulo rectángulo e isósceles de catetos "a/2". La hipotenusa será igual a la mitad de la diagonal "d/2".
ii) A continuación se construye un triángulo rectángulo de catetos "a/2" y "d/2". La hipotenusa será igual a la altura de cara "h", y la altura del triángulo, correspondiente al vértice del ángulo recto, tendrá como medida "n/2", mitad de la normal común.

CONOCIDA LA ALTURA DE CARA "h"



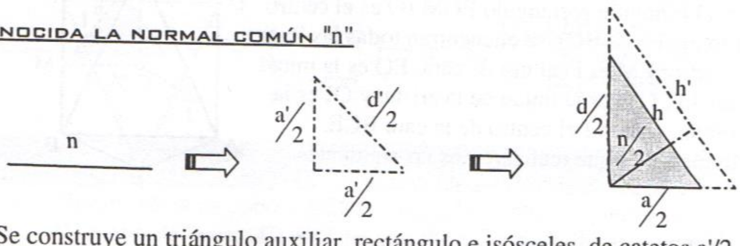
i) Se construye un triángulo equilátero auxiliar con una medida arbitraria "a' ", del cual se halla la altura "h' ".
ii) Por semejanza, se superpone un segmento de medida dada "h", sobre la altura "h' ", y por paralelas se construye el nuevo triángulo equilátero (sombreado) de lado "a".
iii) A continuación se construye un triángulo rectángulo con un cateto de medida "a/2", y la hipotenusa "h". El restante cateto será igual a la mitad de la diagonal, y la altura correspondiente al ángulo recto será la mitad de la normal común, o sea "n/2".

CONOCIDA LA DIAGONAL "d"



i) Se construye una semicircunferencia de diámetro d/2, y luego el triángulo rectángulo isósceles de la figura cuyos catetos serán igual a la mitad de la arista, o sea "a/2".
ii) Conocidas la arista y la diagonal se resuelve como en casos anteriores.

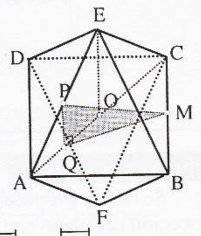
CONOCIDA LA NORMAL COMÚN "n"



i) Se construye un triángulo auxiliar, rectángulo e isósceles, de catetos a'/2 . Su hipotenusa tendrá una medida d'/2.
ii) Se construye un triángulo rectángulo de catetos a'/2 y d'/2, y se halla la altura del vértice correspondiente al ángulo recto, o sea n'/2.
iii) Se ubica un segmento igual a n/2 sobre el ya existente n'/2 con el vértice correspondiente al ángulo recto en común, y por paralelas se determina el triángulo sombreado que contiene a todas las líneas fundamentales del octaedro.

EJEMPLO 3

Se considera un octaedro regular ABCDEF con P punto medio de $\overline{AE}$ y M punto medio de BC. Hallar las líneas fundamentales del octaedro en verdadera magnitud, a partir de un segmento $\overline{PM} = x$ cm

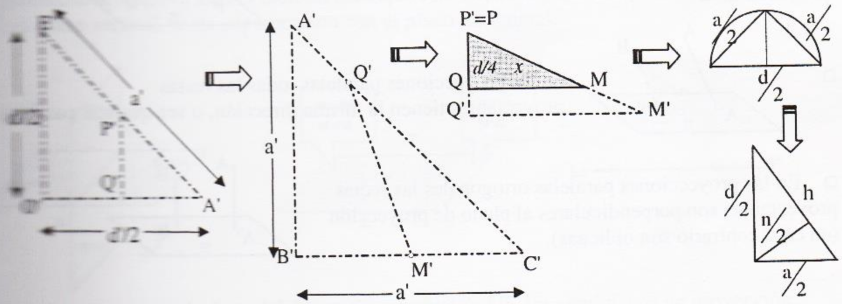


Por el punto P se traza una perpendicular al plano que contiene los puntos A, B, C y D, que lo corta en Q. Luego $\overline{PQ}$ será la paralela media del triángulo $\widehat{AEO}$, cuyos catetos son iguales a la mitad de la diagonal, y su hipotenusa es igual a una arista. A continuación enunciaremos un procedimiento para construir el triángulo $\widehat{PQM}$

a) Partiendo de una arista arbitraria "a' ", se construye un triángulo rectángulo A'E'O', cuya hipotenusa $\overline{A'E'}$ mida "a' ". Los catetos resultantes medirán "d'/2". A continuación por el punto medio de $\overline{A'E'}$ se traza la paralela media $\overline{P'Q'}$.

b) Se construye ahora, el triángulo rectángulo $\widehat{A'C'B'}$, cuyos catetos $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ midan "a' ". Se ubica O' punto medio de $\overline{A'C'}$, Q' punto medio de $\overline{A'O'}$ y M' punto medio de $\overline{B'C'}$, determinándose el segmento $\overline{Q'M'}$

c) Por último se construye el triángulo rectángulo $\widehat{P'Q'M'}$ con $\overline{P'Q'}$ y $\overline{Q'M'}$, hallados en los pasos anteriores. A continuación se ubica el segmento $\overline{PM} = x$ cm sobre $\overline{P'M'}$, haciendo coincidir P con P'. Por paralelas se halla el nuevo triángulo $\widehat{PQM}$ (sombreado), y en dónde $\overline{PQ}$ será igual a la cuarta parte de la diagonal, o sea "d/4". Conocida la diagonal se construyen las demás líneas fundamentales del octaedro, según procedimiento ya explicado.



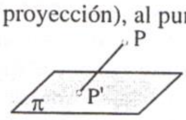
EJERCICIOS — Grupo 4

1. Se considera un octaedro regular ABCDEF, y los puntos I, centro de la cara ADE, y K, centro de la cara ADF, tal que $\overline{IK} = 5$ cm. Hallar todas las líneas fundamentales del octaedro.
2. En un octaedro ABDCEF de centro O, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y N el punto medio de MF. Hallar las líneas fundamentales del octaedro si ON = 4cm
3. Los centros de las caras que constituyen un octaedro regular son los vértices de un cubo inscrito dentro del octaedro. Construir las líneas fundamentales del cubo, sabiendo que la altura de cara del octaedro mide 8 cm.

Capítulo 2
REPRESENTACIÓN DE PUNTOS

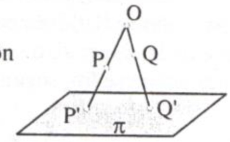
1. PROYECCIONES

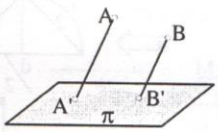
Se define proyección de un punto sobre un plano, (plano de proyección), al punto de intersección del plano con una recta llamada proyectante, que pasa por el punto y cumple con una segunda condición según el método de proyección elegido.



Las proyecciones de un punto sobre un plano pueden ser cónicas o paralelas, y dentro de las proyecciones paralelas se pueden distinguir proyecciones oblicuas u ortogonales.

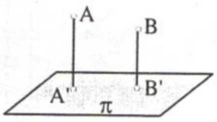
- En las proyecciones cónicas todas las rectas de proyección pasan por un punto exterior al plano llamado centro de proyección.



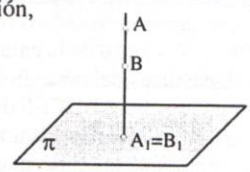


- En las proyecciones paralelas todas las rectas proyectantes tienen la misma dirección, o sea que son paralelas.

- En las proyecciones paralelas ortogonales las rectas proyectantes son perpendiculares al plano de proyección (en caso contrario son oblicuas).

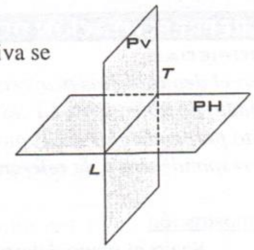


En lo sucesivo se trabajará con proyecciones paralelas ortogonales, refiriéndonos a ellas como simplemente, proyecciones. Si bien existe una correspondencia entre los puntos del espacio y los puntos del plano de proyección, dicha correspondencia no es biyectiva, ya que, aunque a cada punto del espacio le corresponde un punto proyección, el recíproco no es válido. Este hecho se debe a la no inyectividad de la correspondencia, ya que a puntos distintos del espacio, les puede corresponder la misma proyección, para ello basta que los puntos del espacio pertenezcan a la misma recta proyectante.

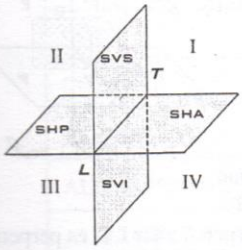


El sistema que utiliza la geometría descriptiva, para determinar puntos y figuras en el espacio, es introducir un segundo plano de proyección y en ocasiones un tercero, como veremos a continuación.

2. PLANOS DE PROYECCIÓN HORIZONTAL Y VERTICAL



El sistema de representación que usa la geometría descriptiva se basa en la proyección ortogonal sobre dos planos de proyección perpendiculares entre sí, llamados plano horizontal (PH) y plano vertical (PV). Estos dos planos cuya recta de intersección recibe el nombre de línea de tierra (LT), determinan en el espacio cuatro diedros, que llamaremos I, II, III, y IV, según el orden que se explicita en la figura.

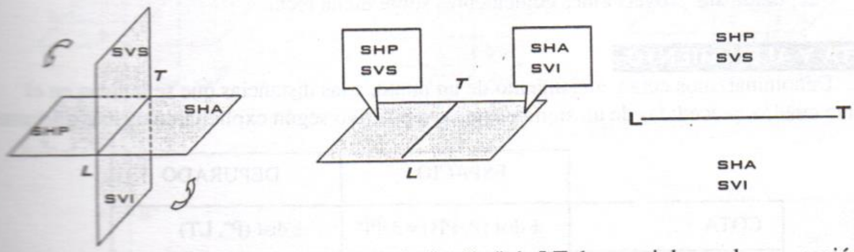


La línea de tierra divide al plano horizontal en dos semiplanos llamados horizontal anterior (SHA) y horizontal posterior (SHP), y a su vez, al plano vertical en los semiplanos denominados vertical superior (SVS) y vertical inferior (SVI).

De esta manera, a modo de ejemplo podemos decir que el primer diedro queda determinado por los semiplanos vertical superior y horizontal anterior.

3. EL MÉTODO DEL DEPURADO

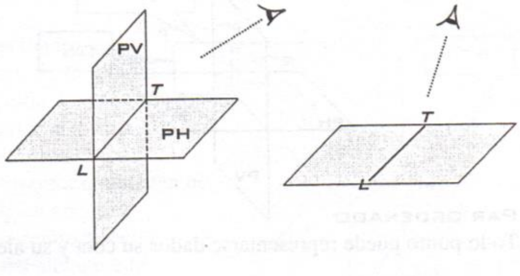
Con el objeto de representar las figuras tridimensionales del espacio en el plano, es que la geometría descriptiva crea el método del depurado. Dicho método consiste en girar con eje LT, el plano vertical, hasta superponerlo con el plano horizontal.



Veremos entonces en el plano del depurado, "arriba" de LT, los semiplanos de proyección vertical superior y horizontal posterior, y "debajo" de LT los semiplanos de proyección vertical inferior y horizontal anterior.

EL OBSERVADOR

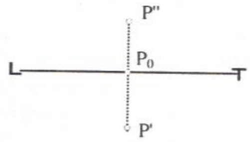
El observador en el espacio se supone situado en el primer diedro, de modo que visualiza al plano vertical "de frente", y al plano horizontal "de arriba".



4. REPRESENTACIÓN DE PUNTOS

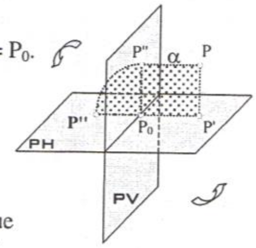
PROPIEDAD

En el depurado las proyecciones de cualquier punto del espacio no ubicado en LT ,están ubicadas en una misma línea recta perpendicular a LT, que denominaremos línea de correspondencia o de referencia.



<u>Demostración</u>

Sea α el plano determinado por P, P' y P'', y $\alpha \cap LT = P_0$.
Como la recta PP'' es perpendicular al plano vertical, entonces cualquier plano que contiene esta recta es perpendicular al PV, o sea que $\alpha \perp PV$.
Además como la recta PP' es perpendicular al PH, entonces de la misma forma se cumplirá que $\alpha \perp PH$.
Si α es perpendicular a ambos planos, entonces se cumplirá que también será perpendicular a su intersección, de donde $\alpha \perp LT$.

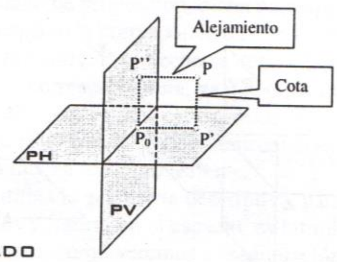


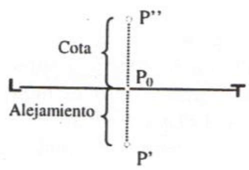
Ahora, cualquier recta del plano α que pase por el pie de la perpendicular LT, es perpendicular a esa recta, por lo que: $P_0P'' \perp LT$ y $\boxed{P_0P' \perp LT}$. Identificaremos con negrita al punto **P''** ya girado sobre el PH.
Al girar con eje LT el punto girado **P''** se ubica en el plano perpendicular al eje por P_0, es decir α, por lo que se cumple que $\boxed{\mathbf{P''}P_0 \perp LT}$.
Considerando las dos proposiciones recuadradas y que en el plano del depurado no existe más que una perpendicular a LT por el punto P_0, se deduce que **P''**, P_0, y P' se encuentran en una misma línea de correspondencia perpendicular a LT, como se quería demostrar.
<u>Notas</u>: 1. El recíproco también es válido. 2.Los puntos pertenecientes a LT tienen en el depurado sus proyecciones coincidentes sobre dicha recta.

5. COTA Y ALEJAMIENTO

Denominaremos cota y alejamiento de un punto, a las distancias que se indican en el siguiente cuadro, precedidas de un signo negativo o positivo según explicitaremos más adelante.

	ESPACIO	DEPURADO
COTA	$\pm$ dist (P, PH) = $\pm \overline{PP'}$	$\pm$ dist (P'', LT)
ALEJAMIENTO	$\pm$ dist (P, PV) = $\pm \overline{PP''}$	$\pm$ dist (P', LT)





PAR ORDENADO

Todo punto puede representarse dados su cota y su alejamiento.

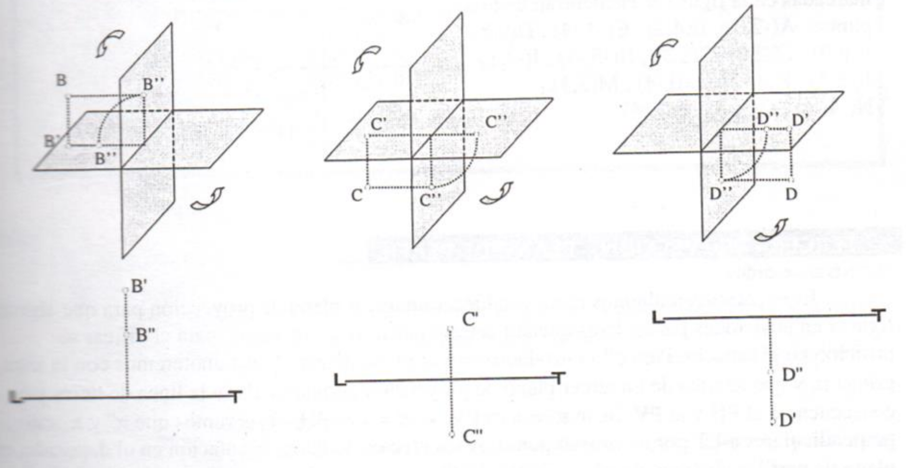
Cuando indiquemos un punto por su cota y alejamiento, por ejemplo cota 4 y alejamiento 5, lo anotaremos P(4,5), o también podremos indicar las medidas, por ejemplo en centímetros: P(4cm,5cm). Nótese que la cota se escribe en primer lugar.

Estableceremos las siguientes convenciones para la determinación de signos de cotas y alejamientos, en el espacio y en el depurado:

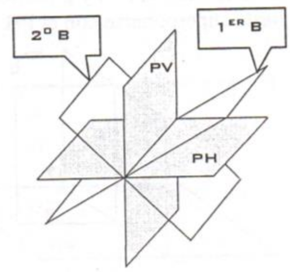
	ESPACIO	DEPURADO
COTA (+)	P arriba del PH	P'' arriba de LT
COTA (–)	P debajo del PH	P'' debajo de LT
COTA cero	P perteneciente al PH	P'' perteneciente a LT
ALEJAMIENTO (+)	P delante del PV	P' debajo de LT
ALEJAMIENTO (–)	P detrás del PV	P' arriba de LT
ALEJAMIENTO cero	P perteneciente al PV	P' perteneciente a LT

Cuando decimos "arriba o debajo de LT" queremos significar que el punto se encuentra en el semiplano superior o inferior respecto de LT, en el plano del depurado.

A modo de ejemplo representaremos puntos del segundo, tercer y cuarto diedro.

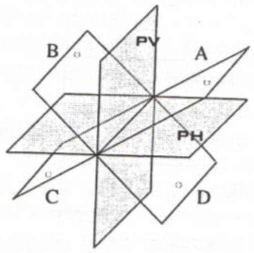


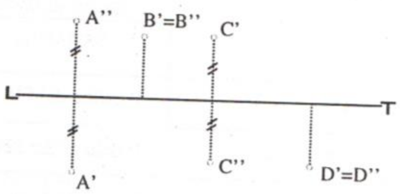
6. PLANOS BISECTORES



Llamaremos planos bisectores a los planos que contienen a los cuatro semiplanos bisectores, de los cuatro diedros formados por los planos de proyección. Convendremos que el primer bisector (1er B), es el que atraviesa los diedros I y III, y el segundo bisector (2º B), es el que atraviesa los diedros II y IV. Como los puntos de cada bisector equidistan de las caras del diedro, estos puntos tendrán igual cota que alejamiento en el primer bisector, y en el segundo bisector cumplirán que su cota es igual al opuesto del alejamiento.

En esta figura están representados en el depurado, puntos pertenecientes a los bisectores, uno en cada diedro.

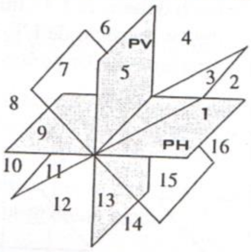




Los puntos del segundo bisector tienen sus proyecciones coincidentes en el depurado, y los del primer bisector tienen sus proyecciones equidistantes de LT, (no superpuestas).

EJERCICIOS Grupo 5

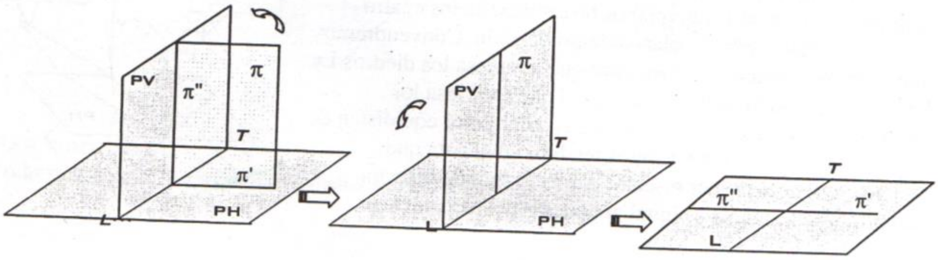
Representar en el depurado los siguientes puntos, e indicar en cual región de las 16 marcadas en la figura se encuentran dichos puntos: A(-2,0) , B(4,2) , C(-3,-4) , D(0,5) E(6,0) , F(-2,2) ,G(1,3) , H(-5,-1) , I(-3,1) J(-2,3) , K(4,-2) , L(0,-4) , M(3,3) , N(-4,-4) , O(5,-5) , P(1,-3)



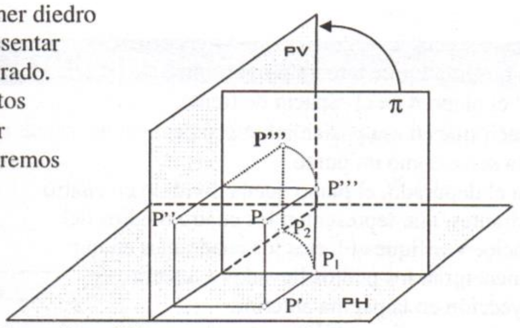
7. TERCERA PROYECCIÓN – PLANO DE PERFIL

Introducción

Es necesario en algunos casos establecer un tercer plano de proyección para que algunas figuras en posiciones particulares queden determinadas, o simplemente para clarificar su posición en el espacio. Para ello introduciremos el plano de perfil, que anotaremos con la letra griega π, y que se trata de un tercer plano de proyección perpendicular a la línea de tierra y en consecuencia al PH y al PV. Sean $\pi'' = \pi \cap PV$ y $\pi' = \pi \cap PH$, observemos que π'' y π' son perpendiculares a LT por un mismo punto. A los efectos de la representación en el depurado, el plano de perfil π gira con eje π'', en sentido antihorario para el observador, hasta que el plano coincide con el PV, y posteriormente, como ya hemos visto, el plano vertical gira con eje LT hasta superponerse con el PH.

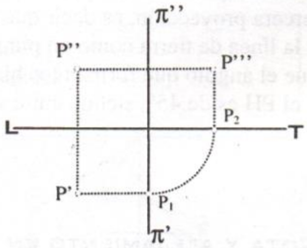


Ejemplificaremos con un punto del primer diedro las construcciones necesarias para representar puntos en tercera proyección en el depurado. Sea el plano α determinado por los puntos P, P'' y P''', dicho plano es perpendicular a la recta π'' por las razones que expondremos a continuación. El plano α es perpendicular a π por contener una recta (PP''') perpendicular a ese plano, y del mismo modo α ⊥ PV ya que PP'' ⊥ PV, luego si un plano es perpendicular a otros dos lo será también a su intersección. Al girar P''' en el espacio con eje π'', dicho punto "se mueve" en un plano perpendicular a π'', y como ese plano es único, debe ser α. Si **P'''** (en negrita) es el punto girado, se deduce que P''**P'''** ⊥ π''. En base a lo expuesto anteriormente, enunciaremos el siguiente método:



MÉTODO PARA OBTENER LA TERCERA PROYECCIÓN DE PUNTOS EN EL DEPURADO

1) Por la proyección horizontal del punto (P'), se traza una paralela a LT, hasta cortar a la recta π' en P_1
2) Dicho punto se gira con centro en la intersección de π con LT, en sentido <u>antihorario</u>, hasta cortar a LT en P_2.
3) Por este último punto se traza la perpendicular a LT, que se corta con la paralela a LT por P'', obteniéndose de este modo la tercera proyección buscada P'''.

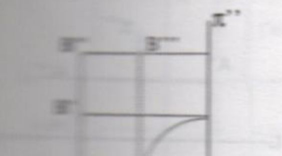


Notas:

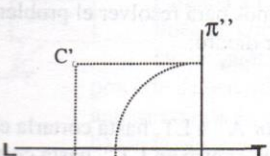
- Los puntos P_1 y P_2 son auxiliares, por lo que en lo sucesivo podremos no escribir dichas letras
- El plano π se ubica en forma arbitraria en cualquier recta perpendicular a LT, aunque por convención lo situaremos a la derecha de las figuras.

PUNTOS DEL SEGUNDO, TERCER Y CUARTO DIEDRO.

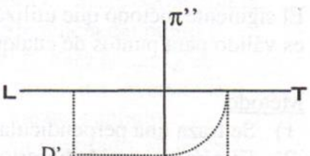
Siguiendo el método explicado anteriormente, obtendremos en el depurado, puntos en tercera proyección, pertenecientes a los diedros II, III, y IV



2º diedro



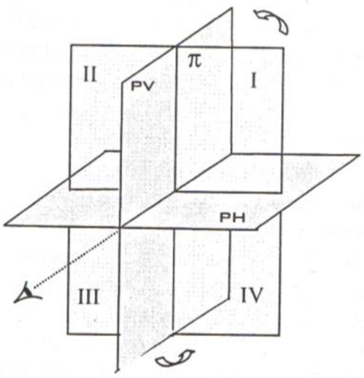
3er diedro



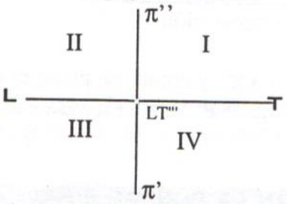
4º diedro

ELEMENTOS EN TERCERA PROYECCIÓN

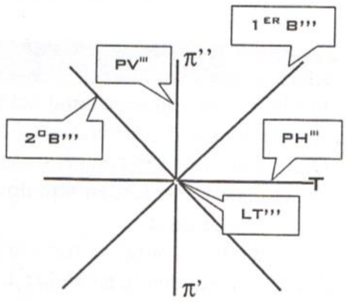
El observador de tercera proyección "ve" el plano π en el espacio de frente, es decir que en esa posición la línea de tierra se ve como un punto.



En el depurado, el plano queda dividido en cuatro cuadrantes, que representan los cuatro diedros del espacio. Verifique el lector los cuadrantes en que se encuentran los puntos llevados a tercera proyección en la página anterior.

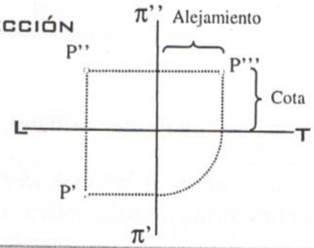


Así mismo los planos bisectores, horizontal y vertical, quedan como planos proyectantes en tercera proyección, es decir que se ven como rectas; y la línea de tierra como un punto. Es de observar que el ángulo que forman los bisectores con el PV y el PH es de 45°, siendo entre sí perpendiculares



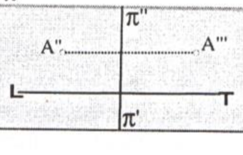
COTA Y ALEJAMIENTO EN TERCERA PROYECCIÓN

En tercera proyección la cota queda determinada por la distancia de P''' a LT y el alejamiento por la distancia de P''' a π, considerando sus correspondientes signos.



EJEMPLO 1

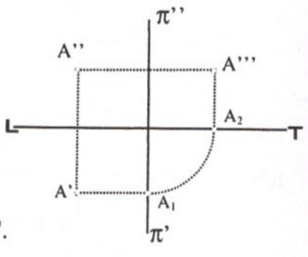
Dadas las proyecciones A'' y A''' de un punto, del primer diedro, hallar su proyección horizontal A'.



El siguiente método que utilizaremos para resolver el problema, es válido para puntos de cualquier diedro:

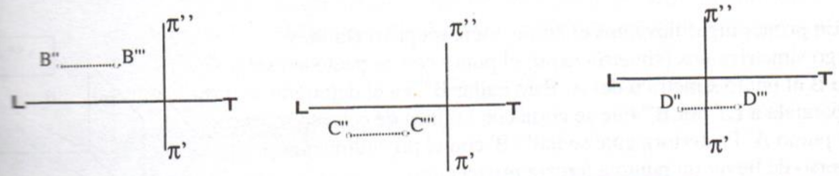
<u>Método</u>

1) Se traza una perpendicular por A''' a LT, hasta cortarla en A_2
2) Se gira en sentido horario, con centro en LT''', hasta cortar π en A_1
3) Por A_1 se traza una paralela a LT, hasta cortarla con la perpendicular a LT por A'', obteniéndose el punto buscado A'.



EJERCICIOS Grupo 6

Hallar las proyecciones horizontales de los siguientes puntos de los diedros II, III y IV.



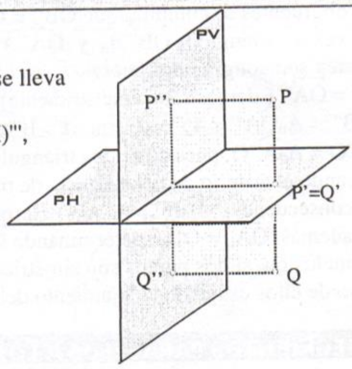
5. SIMETRIZACIONES

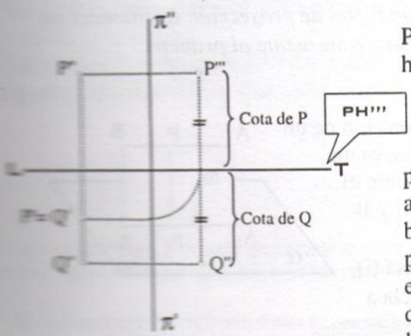
Una aplicación interesante de la tercera proyección, es la de simetrizar puntos con respecto a PH, PV o bisectores. El problema de simetrizar un punto con respecto a un plano, (simetría especular), se reduce en tercera proyección a una simetría axial.

EJEMPLO 2

a) Simetrizar un punto P del primer diedro con respecto al PH
b) Deducir que relación cumplen las proyecciones horizontales y verticales del punto P y su simétrico en el depurado.

a) Sea Q el punto simétrico buscado. En primer lugar se lleva a tercera proyección el punto P.
Se efectuará luego la simetría axial con respecto a (PH)''', obteniéndose su simétrico Q'''.
Es importante resaltar el hecho de que en todas las simetrizaciones mencionadas, el **nuevo punto simétrico se encuentra en la misma línea de correspondencia que el original**, ya que pertenece al mismo plano perpendicular a LT, determinado en el espacio por P, P', y P'' (ver figura).

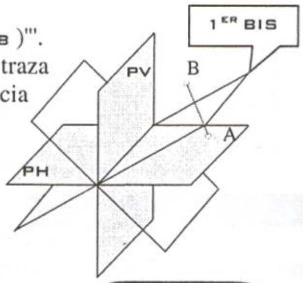




Para obtener las proyecciones vertical y horizontal del punto simetrizado, se traza una paralela a LT por Q''', hasta cortar con la línea de correspondencia del punto P. Dicho punto es Q''. Para hallar Q' se procede de acuerdo al problema inverso visto anteriormente en este mismo capítulo.
b) De la observación del depurado, en tercera proyección, se deduce que ambos puntos tienen el mismo alejamiento y cotas opuestas, es decir que sus proyecciones horizontales coinciden, y las verticales son simétricas respecto de LT

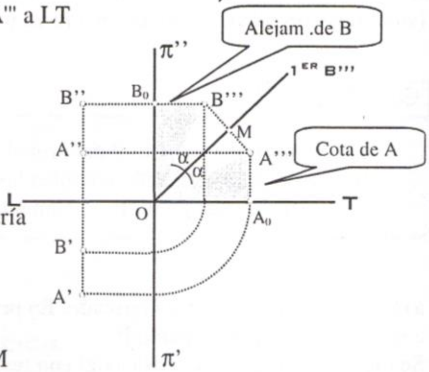
EJEMPLO 3

a) Simetrizar el punto A(3,5) con respecto al primer bisector.
b) Deducir que relación cumplen sus proyecciones horizontal y vertical.



a) En primer lugar llevamos el punto a tercera proyección, y luego simetrizamos (simetría axial) el punto con respecto a $(1^{ER}B)'''$. Sea B el punto simétrico del A. Para hallar B'', en el depurado se traza la paralela a LT por B''' que se corta con la línea de correspondencia del punto A. Posteriormente se halla B' con el procedimiento inverso de llevar un punto a tercera proyección.
Se observa que la cota de B es igual al alejamiento de A, y el alejamiento de B igual a la cota de A.
Intentaremos demostrar esta observación.
b) Sean los siguientes puntos auxiliares:

- ✓ A_0 el pie de la perpendicular trazada desde A''' a LT
- ✓ B_0 es el punto intersección de B''B''' con π''
- ✓ $M = A'''B''' \cap (1^{ER}B)'''$
- ✓ Llamaremos O a (LT)'''.

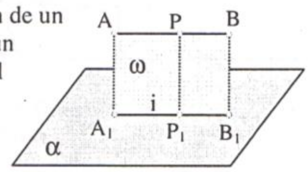


En la simetría axial de eje $(1^{ER}B)'''$, el punto O se transforma en si mismo y el punto A''' en B''', luego, el segmento $\overline{OA'''}$ se transforma en $\overline{OB'''}$.
Como los segmentos correspondientes en una isometría son congruentes se cumplirá que $\overline{OB'''} = \overline{OA'''}$.
A su vez los triángulos $OB'''B_0$ y $OA'''A_0$ también son congruentes pues:
$\overline{OB'''} = \overline{OA'''}$ (demostrado anteriormente)
$B_0\widehat{O}B''' = A_0\widehat{O}A''' = 45° - \alpha$, con $\alpha = B'''\widehat{O}M = A'''\widehat{O}M$
$B_0\widehat{B'''}O = A_0\widehat{A'''}O$, pues como los triángulos son rectángulos, el tercer ángulo debe ser igual.
Aplicando el criterio de congruencia de triángulos A.L.A. se deduce que $OB'''B_0 = OA'''A_0$, y en consecuencia: $\overline{B_0B'''} = \overline{A_0A'''}$, determinando B_0B''' el alejamiento de B y $\overline{A_0A'''}$ la cota de A, y además $\overline{OA_0} = \overline{OB_0}$, determinando $\overline{OA_0}$ el alejamiento de A y $\overline{OB_0}$ la cota de B.
En conclusión, si dos puntos son simétricos respecto del primer bisector, se cumple que la cota de uno de ellos es igual al alejamiento del otro y viceversa.

9. SEGMENTOS PARALELOS A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

Si un segmento de recta $\overline{AB}$, es paralelo a un plano de proyección α, entonces su proyección sobre éste, es un segmento $\overline{A_1B_1}$, paralelo y congruente al primero.

<u>Demostración</u>

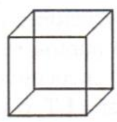


Demostraremos en primer lugar que la proyección de un segmento no perpendicular a un plano de proyección, es un segmento. En primer lugar se proyecta el punto A sobre el plano α, obteniéndose el punto A_1. Los puntos A, A_1 y B determinan el plano ω. Sea $\omega \cap \alpha = i$.
La proyección de B sobre α debe pertenecer a la recta (i), pues si se traza por un punto de un plano, una paralela a

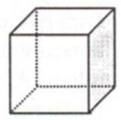
una recta del mismo, ésta pertenece a él (propiedad GE 14), luego el punto B_1 pertenece a la intersección de ω con α, es decir a la recta (i). Posteriormente, cualquier punto del segmento $\overline{AB}$, se proyectará sobre el segmento $\overline{A_1B_1}$ en forma única.[1]
Como el segmento $\overline{AB}$ es paralelo a α, el plano ω que lo incluye, cortará a éste según una recta paralela (propiedad GE 13), es decir que $AB \parallel A_1B_1$, con lo que queda probado el paralelismo. Por último como $AA_1 \parallel BB_1$, ya que son rectas proyectantes, y como ya demostramos que $AB \parallel A_1B_1$, se cumplirá que el cuadrilátero ABB_1A_1 es un paralelogramo y en consecuencia sus lados opuestos $\overline{AB}$ y $\overline{A_1B_1}$ son congruentes

10. MODELADO ALÁMBRICO

Con los conocimientos adquiridos hasta este momento, estamos en condiciones de resolver ejercicios de representación de poliedros ubicados en posiciones particulares. Utilizaremos para ello el método llamado modelado alámbrico [2], en donde se busca representar solamente el "esqueleto" de los poliedros. Es decir que solamente consideraremos los vértices y las aristas. En este tipo de representación no se toman en cuenta las superficies, ni se consideran las aristas vistas y ocultas.



Modelo Alámbrico

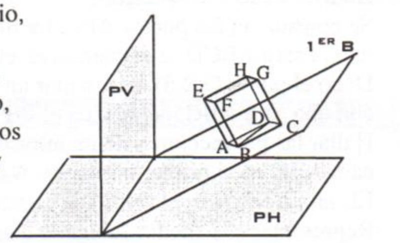


Modelo de superficie con vistas y ocultas

EJEMPLO 4

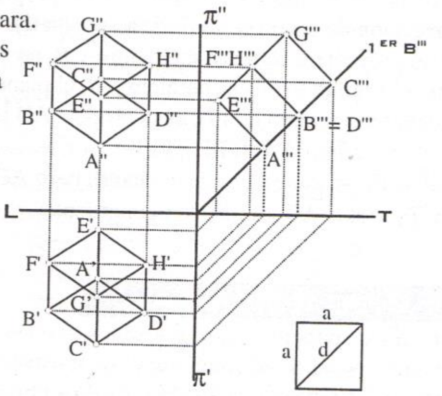
Representar un cubo $ABCDEFGH$ de arista dada "a", con la cara ABCD incluida en el primer bisector, la diagonal $\overline{BD}$ paralela a LT , y el punto A(2,2).

En primer lugar realizamos un bosquejo en el espacio, que nos puede ser útil para visualizar las posibles propiedades que nos ayuden a resolver el problema. Seguidamente procedemos a trabajar en el depurado, ubicando un punto A(2,2), (cualquiera de los infinitos posibles, preferentemente en el centro del dibujo), y dibujamos el plano de perfil y el primer bisector en tercera proyección.
A continuación detallaremos el procedimiento o programa de construcción que utilizaremos:



(1) Esto se debe a que la función proyección paralela es biyectiva y conserva el orden, ver el libro "Geometría Métrica, Plano y Espacio", del mismo autor, capítulo 10, numeral 1.

(2) El modelado alámbrico, o *wireframe* es uno de los tres modelados de objetos 3D que utiliza el programa para computadoras "AUTOCAD", frecuentemente utilizado por arquitectos e ingenieros



- Se ubica A'''.
- En figura aparte se construye la diagonal de cara.
- Como el segmento $\overline{AC}$ es paralelo a π (pues es perpendicular a LT), se proyecta en verdadera magnitud en tercera proyección, por lo cual construimos $\overline{A'''C'''}$.
- Se ubican B''' y D''' coincidiendo con el punto medio de $\overline{A'''C'''}$.
- Las aristas $\overline{EA}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, y $\overline{DH}$ también son paralelas al plano de perfil, de donde se ven en verdadera magnitud en tercera proyección, y se pueden construir.
- Para hallar las proyecciones verticales y horizontales de los puntos, se considerará que E, A, C y G se encuentran en un mismo plano perpendicular a LT, o sea que E, G, y C están en la misma línea de correspondencia que A.
- Los puntos B y D se encuentran a una distancia igual a la mitad de la longitud de la diagonal de cara, del punto medio de $\overline{AC}$. Como $\overline{BD}$ es paralelo a LT, lo es también al PH y al PV, o sea que se proyecta en verdadera magnitud en dichos planos de proyección.
  Razonamos de igual forma para los puntos H y F.
- Por último unimos los vértices correspondientes con el fin de dibujar las aristas.

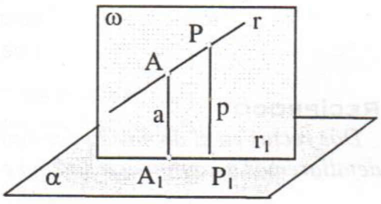
EJERCICIOS Grupo 7

1. Dado el punto A(5,3) simetrizarlo en tercera proyección con respecto a:
   a) plano horizontal b) plano vertical c) LT d)primer bisector e) segundo bisector
   Hallar en cada caso las proyecciones vertical y horizontal de los puntos y deduzca una propiedad que le permita simetrizar en cada caso sin usar tercera proyección.
2. Dado el punto B(-4,2) efectuar las mismas simetrizaciones que en el ejercicio anterior sin usar tercera proyección.
3. Se consideran los puntos A(0,2) y B(0,5), con $\overline{AB}$ = 4 cm. Construir un cubo sabiendo que la cara ABCD se encuentra en el PH y el cubo esta incluido en el primer diedro.
4. Dado el punto O(2,5) representar un tetraedro regular ABCD, del cual O es su centro con una cara ABC incluida en el PH y tal que AB forma 45° con LT.
5. Hallar las proyecciones de un tetraedro regular ABCD, con el vértice D(6,1), la cara ABC en el primer bisector y A de mayor cota posible.
6. EL punto I(7,3) es el centro de la cara ABCD de un cubo de 5 cm de arista. Representar el poliedro sabiendo que AB es paralela a LT y ABCD se encuentra en un plano paralelo al primer bisector.
7. Hallar las proyecciones de un octaedro regular ABCDEF, con la diagonal $\overline{EF}$ paralela a LT, y la arista CD en una misma línea de referencia con C(2,3) y D(6,8).
8. Hallar las proyecciones de un cubo ABCDEFGH, cuyo centro es el punto O(5,8), de arista 4 cm y el plano diagonal AEGC paralelo al plano vertical.
9. Representar un octaedro regular con un plano diagonal ABCD incluido en el primer bisector, centro O(5,5) y AB paralela a LT.
10. Representar un cubo ABCDEFGH de arista 4 cm con el plano diagonal BCHE incluido en el primer bisector, con EH paralela a LT, B mayor cota que E, y E(2,2).

Capítulo 3
REPRESENTACIÓN DE RECTAS

1. PROYECCIÓN DE UNA RECTA

La proyección de una recta (r) no perpendicular a un plano de proyección α, es otra recta r_1.



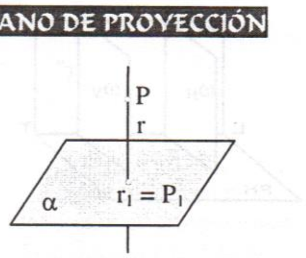
Demostración

Sea un punto $A \in r$. Por A se considera la recta proyectante (a) que corta a α en A_1. Las rectas (r) y (a) determinan un plano ω. Sea r_1 la intersección de α y ω. Todo punto P de la recta (r) tendrá su proyección sobre la recta r_1, pues si por $P \in \omega$, se traza la recta proyectante (p), ésta, al ser paralela a la recta (a) incluida en ω, debe estar contenida en ω (propiedad G.E. 14). Por lo tanto su intersección P_1 debe estar incluida en la intersección de ambos planos, o sea r_1. Recíprocamente como la función paralela es biyectiva, todo punto de r_1 tendrá una pre-imagen en (r).

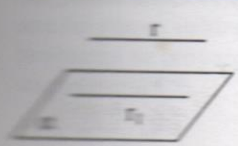
OBSERVACIÓN: El plano ω recibe el nombre de plano proyectante. Dicho plano, que contiene a (r) y es perpendicular al plano de proyección, es único (propiedad G.E. 47), por lo que, para hallar la proyección de una recta, basta hallar la intersección del plano proyectante que contiene a la recta con el plano de proyección.

2. PROYECCIÓN DE UNA RECTA PERPENDICULAR AL PLANO DE PROYECCIÓN

Si la recta es perpendicular al plano de proyección, se proyecta sobre éste como un punto. Si llamamos r_1, al punto intersección de (r) con α, para todo punto P perteneciente a la recta (r) se cumplirá que su proyección P_1 sobre α coincidirá con r_1, pues por un punto no existe más que una perpendicular a un plano.

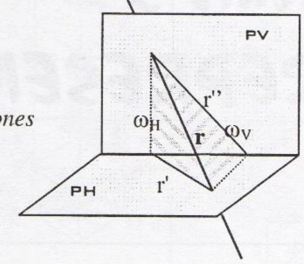


3. RECTA PARALELA AL PLANO DE PROYECCIÓN



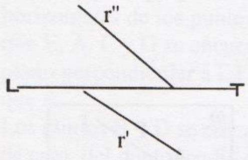
Si una recta es paralela a un plano de proyección, entonces su proyección sobre el plano, es una recta r_1, paralela a ella. La demostración es análoga a la efectuada en el capítulo 2, numeral 10.

4. REPRESENTACIÓN DE LA RECTA EN EL DEPURADO



PROPIEDAD

Toda recta que no sea perpendicular a ninguno de los planos de proyección, se representa en el depurado mediante dos rectas, llamadas proyecciones horizontal y vertical de la misma.



Para demostrar esta proposición, basta trazar los planos proyectantes sobre el PV y el PH, que contengan a la recta. Sean ω_V y ω_H dichos planos. Luego es inmediato que $\omega_V \cap PV = r''$ y que $\omega_H \cap PH = r'$

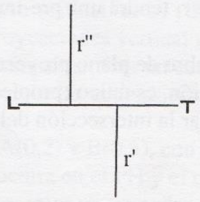
RECÍPROCO

Dos rectas en el depurado determinan una recta en el espacio, salvo los tres casos que detallaremos a continuación como excepciones.

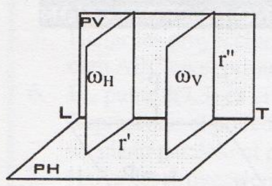
Para demostrar el caso general se traza por r'' un plano perpendicular al PV (ω_V) y por r' un plano perpendicular al PH (ω_H). Luego la recta determinada será $\omega_V \cap \omega_H = r$.
Seguidamente analizaremos cuando la intersección de los planos no es una recta.

EXCEPCIÓN 1

En el depurado dos rectas perpendiculares a LT y disjuntas, no representan a una recta en el espacio.



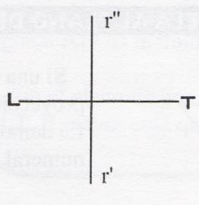
Demostración



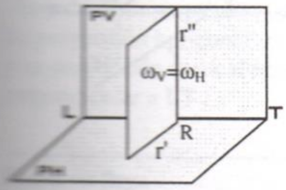
El plano ω_V que contiene a r'' es perpendicular al PV por definición, y además es perpendicular al PH por contener a r'' (recta perpendicular al PH), de donde ω_V será perpendicular a la intersección de ambos planos, o sea LT. De igual manera se puede razonar para deducir que ω_H es perpendicular también a LT. Si dos planos son perpendiculares a una misma recta, por puntos distintos de ella, entonces son paralelos disjuntos (propiedad G.E. 38), de donde $\omega_V \cap \omega_H = \varnothing$.

EXCEPCIÓN 2

En el depurado dos rectas perpendiculares a LT y coincidentes representan una recta pero no la determinan.



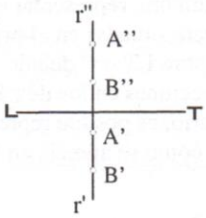
Demostración



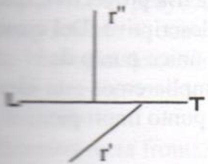
Sea R el punto de corte de r'' y r' en el espacio. Razonando como en el caso anterior ω_V y ω_H serán perpendiculares a LT en el punto R. Como no existe más que un plano perpendicular a una recta por un punto (propiedad G.E. 29), entonces ω_V y ω_H coinciden, y por lo tanto no determinan una recta en el espacio.

OBSERVACIÓN

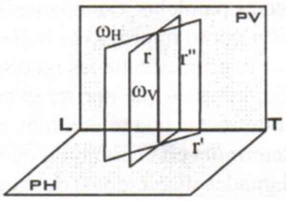
Si se quiere determinar la recta, además de las proyecciones r'' y r' en las condiciones indicadas, se necesitan las proyecciones de dos de sus puntos, como indica la figura.



EXCEPCIÓN 3

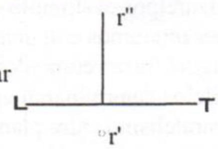


En el depurado una recta perpendicular a LT, y la otra una recta cualquiera, no representan una recta en el espacio.



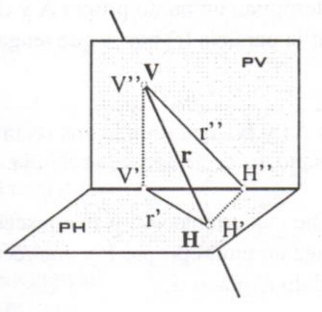
Demostración

Sea la proyección r'' perpendicular a LT, entonces el plano proyectante ω_V es perpendicular al PH pues contiene una recta (r'') perpendicular al PH. Así mismo ω_H por ser proyectante vertical, es perpendicular al PH. Valiéndose de la propiedad que establece que si un plano (PH), es perpendicular a otros dos planos secantes (ω_V y ω_H), entonces lo será a su intersección, (propiedad G.E. 46)podemos afirmar que la recta intersección (r) determinada en el espacio será perpendicular al PH. Este tipo de rectas tiene su proyección horizontal representada por un punto, como indica la figura de la derecha, lo que contradice la hipótesis inicial.



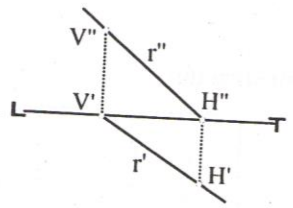
TRAZAS DE UNA RECTA

A los puntos de corte de toda recta con los planos de proyección, se les denomina trazas. Designaremos con V y H a los puntos intersección de la recta con los planos vertical y horizontal de proyección respectivamente.



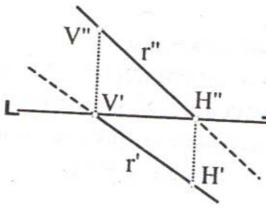
Se designarán en el depurado las proyecciones de la traza vertical de la recta como (V_r'',V_r') y las proyecciones de la traza horizontal como (H_r'',H_r').

MÉTODO PARA HALLAR LAS TRAZAS DE UNA RECTA CUALQUIERA EN EL DEPURADO



- ✓ Para hallar V' se corta r' con LT, y V" se encontrará en línea de correspondencia sobre r"
- ✓ Para hallar H" se corta r" con LT y la proyección horizontal H', se encontrará en línea de correspondencia sobre r'

OBSERVACIÓN



En general, se acostumbra representar en el depurado las proyecciones de la recta situadas en el primer diedro, de ahí que no prolonguemos r' sobre LT o r" debajo de LT, lo que no implica que las proyecciones en los demás diedros no existan. En caso de ser necesario, es posible representar las proyecciones en los cuatro diedros como se aprecia en la figura adjunta.

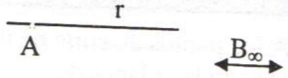
6. ELEMENTOS IMPROPIOS

Introduciremos a continuación un concepto basado en la geometría proyectiva, que nos será útil para determinados problemas de nuestro curso de geometría descriptiva. Del curso de geometría métrica se sabe que dos rectas secantes tienen en común un único punto de intersección. Es decir que dos rectas secantes determinan un punto. Ampliaremos esta idea a las rectas paralelas, estableciendo que dos rectas paralelas determinan un punto impropio.
Este punto impropio se halla determinado por la dirección de las rectas.

Recordemos que por ser el paralelismo entre rectas una relación de equivalencia, determina en el conjunto de todas las rectas del espacio, una partición en clases de equivalencia, llamadas direcciones, de modo que, dos rectas son paralelas si tienen la misma dirección, es decir el mismo punto impropio.
Utilizaremos el símbolo ∞ como subíndice, para identificar a los puntos impropios, y los representaremos con una doble flecha para indicar su dirección.
De igual forma como dos planos secantes determinan una recta intersección, dos planos paralelos determinaran una recta impropia, que anotaremos r_∞.
El paralelismo entre planos determina en el conjunto de todos los planos del espacio, una partición en clases de equivalencia llamadas orientaciones, de modo que si dos planos son paralelos tienen la misma orientación, es decir la misma recta impropia.

ALGUNAS CONSIDERACIONES PRÁCTICAS

- ✓ Trazar la recta que determinan un punto propio A y otro impropio B_∞, es trazar la paralela (r) por A que tenga la dirección de B_∞.

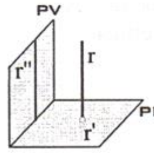


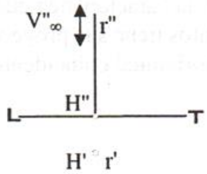
- ✓ Dos puntos impropios A_∞ y B_∞,determinan una recta impropia r_∞ que no tiene representación en el plano, es decir que no se dibuja.
- ✓ Como un plano α define una orientación y en consecuencia una recta impropia; trazar un plano β que contenga un punto propio P y una recta impropia r_∞, es trazar por el punto un plano β paralelo al plano α.

7. RECTAS PARTICULARES

Recta vertical

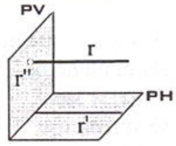
Es toda recta perpendicular al PH. Su proyección horizontal es un punto y su proyección vertical es una recta perpendicular a LT.

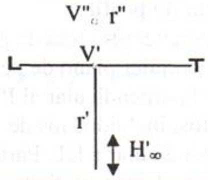




Recta de fuga

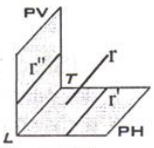
Es toda recta perpendicular al PV. Su proyección vertical es un punto y su proyección horizontal es una recta perpendicular a LT.

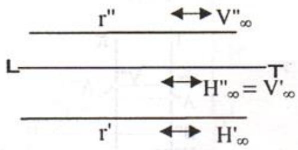




Recta paralela a LT

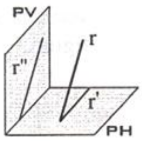
Como su nombre lo indica, es una recta paralela a LT, y en consecuencia paralela al PH y al PV. Sus proyecciones r' y r'' son paralelas y sus trazas coinciden en el punto impropio determinado por la dirección de LT.

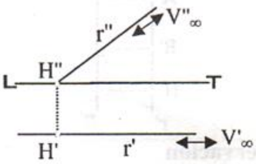




Recta frontal

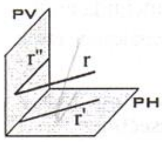
Se denomina recta frontal a toda recta paralela al PV. En consecuencia también serán rectas frontales las rectas verticales y las paralelas a LT.

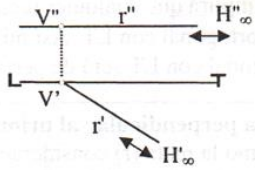




Recta horizontal

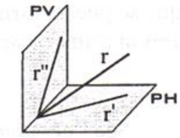
Se denomina recta horizontal a toda recta paralela al PH. Las rectas paralelas a LT y las de fuga también son horizontales particulares.

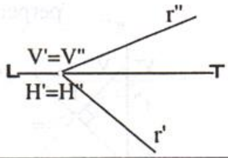




Recta que corta a LT (en un punto propio)

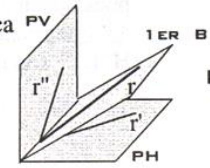
Como lo dice su nombre este tipo de recta corta a LT, y sus trazas coinciden en dicho punto.

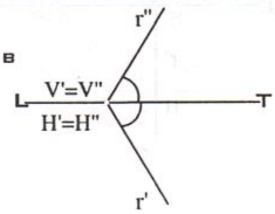




Recta incluida en el primer bisector

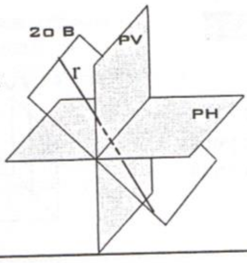
Es una recta que corta a LT, con la característica de que todos sus puntos tienen igual cota que alejamiento, de donde, las proyecciones verticales y horizontales de la recta serán simétricas respecto de LT y en consecuencia formarán igual ángulo con la línea de tierra.

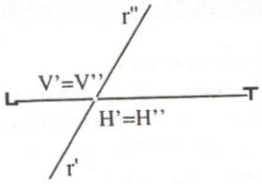




Recta incluida en el segundo bisector

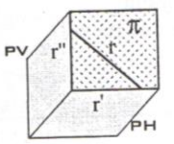
Es también una recta que corta a LT, con la característica que cada uno de sus puntos tiene sus proyecciones vertical y horizontal coincidentes.

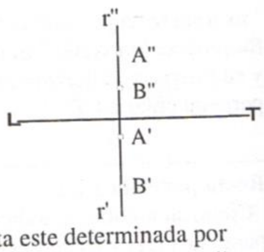


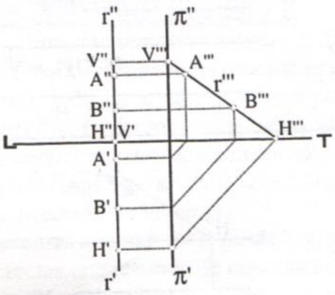


Recta de perfil

Llamaremos recta de perfil a toda recta contenida en cualquier plano de perfil. Por ser el plano de perfil perpendicular al PH y al PV, todos sus puntos, incluidos los de la recta, se ven en una perpendicular a LT. Para determinar la recta deben además explicitarse las proyecciones de dos de sus puntos.



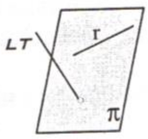




Para el caso en que la recta este determinada por dos puntos distintos de las trazas, y se quieran hallar dichas trazas, es necesario llevar la recta a tercera proyección mediante los dos puntos dados. En tercera proyección se ubican las trazas V''' y H''', determinándose posteriormente las proyecciones verticales y horizontales de V y H como indica la figura.

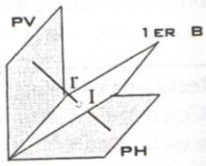
Observación

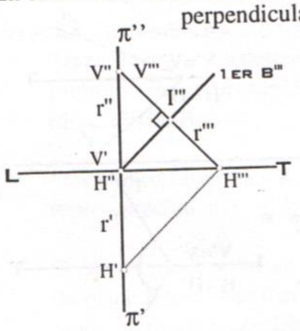
Como LT es perpendicular al plano de perfil π se cumplirá que cualquier recta (r) incluida en π, será ortogonal con LT. Así mismo cualquier recta ortogonal con LT será de perfil.



Recta perpendicular al primer bisector

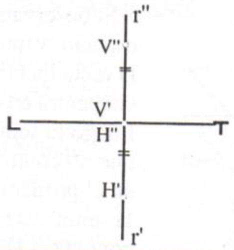
Como la recta (r) considerada, es perpendicular al primer bisector, y LT está contenida en dicho plano, se puede deducir que (r) es ortogonal a LT. En base a esta observación, es que se puede afirmar que las rectas perpendiculares al primer bisector son rectas de perfil.





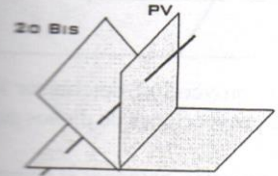
Sea I el punto de intersección de (r) con el primer bisector. En tercera proyección se puede deducir que los triángulos V'''LT'''I''' y H'''LT'''I''' son congruentes, pues tienen un lado en común LT'''I''' y ángulos de 90° y 45° congruentes. Se infiere entonces que V'''LT''' y H'''LT''' son iguales, de donde V''V'=H''H'

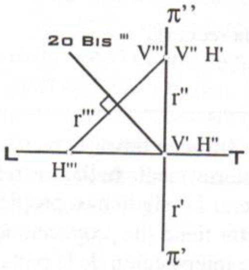
Como corolario se puede afirmar que toda recta de perfil cuyas trazas equidistan de LT (sin coincidir) representa una recta perpendicular al primer bisector y recíprocamente.

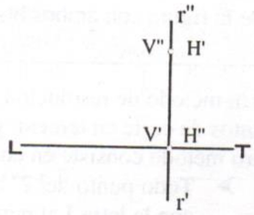


Recta perpendicular al segundo bisector

Razonando en forma análoga al punto anterior, hemos de afirmar que toda recta perpendicular al segundo bisector es una recta de perfil cuyas trazas se encuentran superpuestas en el depurado.

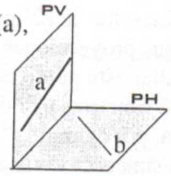


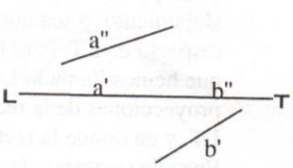




Rectas contenidas en el PH o en el PV

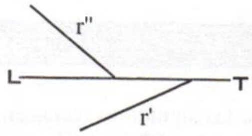
Cuando la recta está incluida en el PV, recta (a), su proyección horizontal coincide con LT y la otra es cualquiera, mientras que cuando la recta se encuentra en el PH, recta (b), su proyección vertical coincide con LT y la otra es cualquiera.





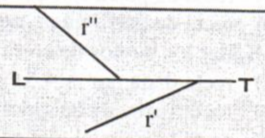
Recta cualquiera

Denominaremos recta cualquiera a aquella que no sea ninguna de las descriptas anteriormente

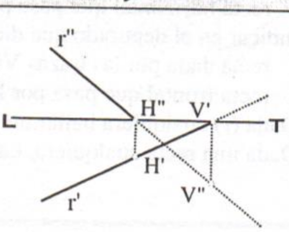


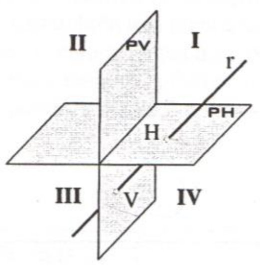
EJEMPLO 1

Determinar en el depurado que diedros atraviesa la recta de la figura.

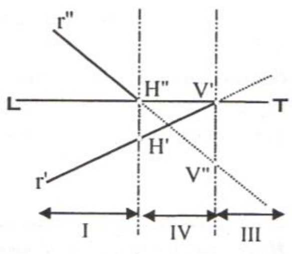


En primer lugar hemos de determinar las trazas. Podemos observar que la traza horizontal H tiene alejamiento positivo, (H' debajo de LT), por lo que H se encuentra en el semiplano horizontal anterior. Así mismo, la traza vertical V tiene cota negativa (V" debajo de LT), de donde V se encuentra en el semiplano vertical inferior.



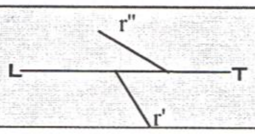


Si observamos un croquis en el espacio, vemos que la porción de la recta incluida entre V y H se encuentra en el cuarto diedro. Luego la semirrecta de origen H que no contiene a V se encuentra en el primer diedro, y por último, la semirrecta de origen V que no contiene a H, se encuentra incluida en el tercer diedro.



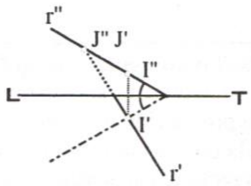
EJEMPLO 2

Determinar la intersección de la recta (r) de la figura con ambos bisectores



Un método de resolución consistiría en llevar la recta a tercera proyección, determinar los puntos de corte en tercera y posteriormente hallar las restantes proyecciones de dichos puntos. Otro método consiste en considerar las siguientes propiedades:

- Todo punto del 2° bisector tiene sus proyecciones superpuestas, entonces si llamamos con la letra J al punto de intersección de la recta con el 2° bisector, en el depurado este punto se hallará en la intersección de las proyecciones r' y r".
- Todo punto del primer bisector, tiene igual cota que alejamiento, o sea que sus proyecciones son simétricas respecto de LT. Para hallar este punto en el depurado, al que hemos llamado I, se simetriza una de las proyecciones de la recta, por ejemplo r", con respecto de LT, y en donde la recta simétrica corta a la restante proyección se encuentra I', y en línea de correspondencia I".



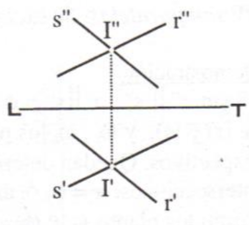
EJERCICIOS Grupo 8

1. Representar las siguientes rectas en el depurado:
   a) recta paralela a LT incluida en el 2° diedro
   b) recta de perfil que pase por A(2,-3) y B(-1,4), hallar trazas.
   c) recta de perfil que pase por P(2,4) y forme 60° con el PV, hallar trazas..
2. Hallar los puntos de corte con los bisectores de las siguientes rectas:
   a) recta dada por A(4,3) y B(-5,-2) con $A_0B_0 = 5$
   b) recta vertical cualquiera
   c) recta horizontal que pase por P(-2,4)
3. Indicar en el depurado que diedros atraviesan las siguientes rectas:
   a) recta dada por las trazas V(1,0) y H(0,-1) con V'H" = 2
   b) recta frontal que pasa por H(0,-2)
4. Dada (r) cualquiera hallar un punto de ella que tenga el doble de cota que de alejam.
5. Dada una recta cualquiera, hallar un punto de ella que diste 2 cm del 1er bisector.

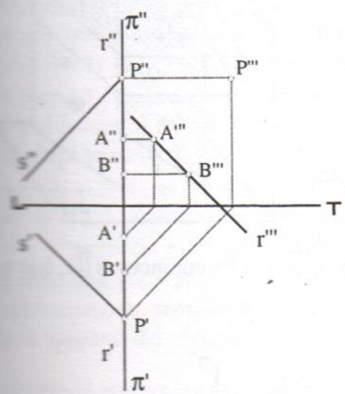
8. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

8.1 RECTAS QUE SE CORTAN

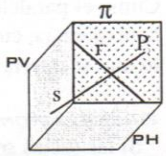
Si dos rectas se cortan en el espacio, entonces los puntos de corte I'' e I', de las proyecciones verticales y horizontales de las rectas deben ubicarse en línea de correspondencia.



El recíproco admite excepciones para las rectas de perfil como veremos en el siguiente ejemplo.



Sean (r) una recta de perfil determinada por dos puntos A y B, y una recta (s) cualquiera. Obsérvese que si bien, $P'' = r'' \cap s''$ y $P' = r' \cap s'$, las rectas (r) y (s) no se cortan en el punto P en el espacio, pues al llevar a tercera proyección la recta (r), se constata que el punto P''' no pertenece a r''', lo que indica que el punto P pertenece a la recta (s) pero no a (r).

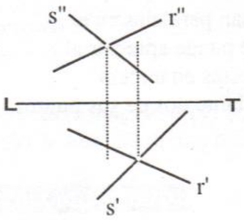


8.2 RECTAS QUE SE CRUZAN

Denominamos rectas que se cruzan en el espacio, a las que no se cortan ni son paralelas.

Si las rectas que se cruzan no son de perfil, los puntos de corte de r'' y s'', y los de r' y s', no están en línea de correspondencia.

El recíproco se cumple a excepción de las rectas de perfil



8.3 RECTAS PARALELAS

Teorema directo

Si dos rectas son paralelas en el espacio, sus proyecciones respectivas son paralelas en el PH y en el PV (1)

Demostración

Sean $P \in r$ y $Q \in s$, y P' y Q' sus proyecciones horizontales.

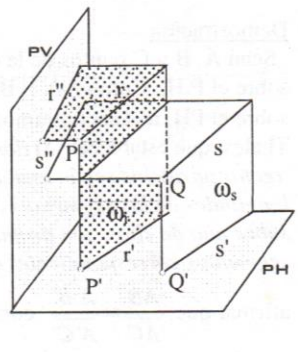
Se consideran además los planos proyectantes horizontales ω_r y ω_s, determinados por (r) y P', y por (s) y Q' respectivamente.

Como (r) es paralela a (s), y PP' es paralela a QQ', entonces los planos ω_r y ω_s serán paralelos (propiedad G.E. 19).

Luego dos planos paralelos cortan a un tercero, (PH), según rectas paralelas.

Considerando que $\omega_r \cap PH = r'$ y que $\omega_s \cap PH = s'$, se concluye que $r' \parallel s'$.

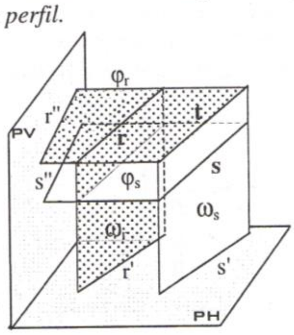
Se utiliza igual razonamiento para demostrar que $r'' \parallel s''$.



(1) Se excluye el caso en que las proyecciones de las rectas sean puntos.

Teorema recíproco

Dos rectas en el espacio son paralelas, si sus proyecciones respectivas sobre el PH y sobre el PV son paralelas. Se excluyen de esta proposición a las rectas de perfil.

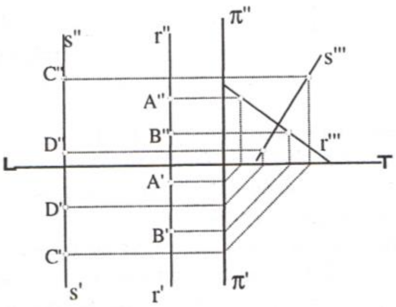


Demostración

Sean $r'' \parallel s''$, $r' \parallel s'$; φ_r , φ_s los planos proyectantes verticales de (r) y (s), y ω_r , ω_s los planos proyectantes horizontales respectivos. Quedan determinadas las siguientes rectas intersecciones: $r = \varphi_r \cap \omega_r$, $s = \varphi_s \cap \omega_s$, $t = \omega_s \cap \varphi_r$.
Como los planos φ_r y φ_s son paralelos cortarán a ω_s según rectas paralelas, o sea **s || t.**
De igual forma como ω_r y ω_s son paralelos cortarán a φ_r según dos rectas paralelas, o sea **t || r.**
Como el paralelismo entre rectas del espacio es una relación de equivalencia, cumplirá la propiedad transitiva, por lo cual si: s || t y t || r entonces s || r, que es lo que se quería demostrar.

OBSERVACIÓN

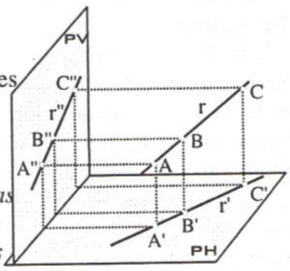
Si las rectas son de perfil, el teorema recíproco no se cumple.
En la figura adjunta vemos que si bien r'' || s'' y r' || s', no se cumple que las rectas (r) y (s) sean paralelas en el espacio, como se puede apreciar al representar las rectas en tercera proyección, mediante dos de sus puntos.



9. PROPORCIONALIDAD ENTRE SEGMENTOS Y SUS PROYECCIONES

TEOREMA

*Las longitudes de los segmentos determinados por puntos de una recta en el espacio, son proporcionales a las longitudes de sus proyecciones.**



Demostración

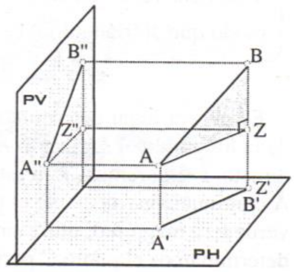
Sean A, B y C puntos de la recta (r), y A', B' y C' sus proyecciones sobre el P.H. Como AA' || BB' || CC', por ser rectas proyectantes sobre el PH, nos encontramos en las hipótesis del teorema de Thales, que establece: "*Si dos rectas (r) y (r') son cortadas por rectas paralelas según una dirección distinta de la de (r) o (r'), las longitudes de los segmentos determinados por los puntos de corte sobre una de ellas, son proporcionales a los determinados por los segmentos correspondientes en la otra*". Por lo tanto es posible afirmar que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ como se quería demostrar. Se razona análogamente para el P.V.

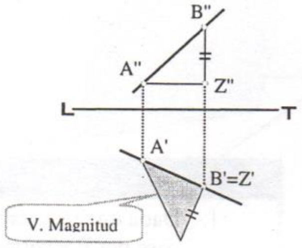
***EXCEPCIÓN**

Quedan excluidos los casos en que la recta se proyecta en un solo punto.

10. PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LA VERDADERA MAGNITUD DE LA LONGITUD DE UN SEGMENTO

Consideremos un segmento $\overleftrightarrow{AB}$, no paralelo a los planos de proyección , del cual se quiere conocer la verdadera magnitud de la longitud del mismo a partir de sus proyecciones. Sea un punto auxiliar Z tal que $Z \in BB'$, y $AZ \parallel A'B'$ como indica la figura. El triángulo $\widehat{AZB}$ es rectángulo, con el ángulo recto de vértice Z, pues BZ es perpendicular al P.H. y AZ es paralelo al mismo. En dicho triángulo se conocen los dos catetos, ya que como AZ es paralelo al P.H., se cumple que $\overline{AZ} = \overline{A'Z'} \equiv \overline{A'B'}$ (obsérvese que B' = Z'). Además como el segmento BZ es paralelo al P.V., se proyecta sobre este plano en verdadera magnitud, es decir que $\overline{BZ} = \overline{B''Z''}$. Finalmente la hipotenusa de dicho triángulo, representa la verdadera magnitud buscada de la longitud del segmento.





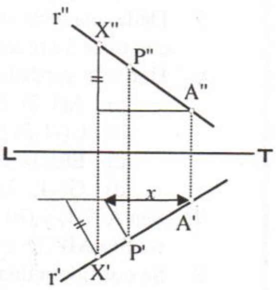
MÉTODO EN EL DEPURADO

1. Por A'' se traza una paralela a L.T. que corta a B''B' en Z'', resultando el segmento B''Z'' que determina la diferencia de cotas.
2. Sobre uno de los extremos del segmento $\overleftrightarrow{A'B'}$ se construye un ángulo recto, y sobre el nuevo cateto se ubica un segmento de igual longitud que la diferencia de cotas.
3. La hipotenusa del triángulo determinado, será la verdadera magnitud del segmento $\overleftrightarrow{AB}$. Denominaremos al triángulo anterior, como triángulo de verdadera magnitud.

11. PROCEDIMIENTO INVERSO DE VERDADERA MAGNITUD

Resolveremos el siguiente problema:

Dada una recta (r) cualquiera y un punto $A \in r$, determinar un punto $P \in r$, tal que el segmento $\overleftrightarrow{AP}$ tenga una longitud dada "x"



MÉTODO EN EL DEPURADO

1. Sobre la recta (r) se ubica un punto auxiliar cualquiera de proyecciones (X'', X').
2. Se construye el triángulo de verdadera magnitud para el segmento AX, de modo que el cateto que contiene a la diferencia de cotas se encuentre con un vértice en X'.
3. Sobre la hipotenusa del triángulo anterior, y a partir del punto A se ubica un segmento cuya longitud sea igual a la longitud dada *"x"*.
4. Por el extremo de la nueva hipotenusa, se traza una paralela al cateto diferencia de cotas, que corta a r' en P'.
5. En línea de correspondencia y sobre r'' se encuentra P''.