Teoremas fundamentales - Ejercicios I

1. a) Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p(x) = 3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8$:
   Aplicando el teorema de Bolzano probar que tiene al menos una raíz positiva.

   b) ¿En qué condiciones se puede afirmar que una función polinómica

   $$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$$

   tendrá al menos una raíz real positiva?

2. La función *tangente* cumple que $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ y $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ pero no hay ningún punto c del intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ tal que $\tan(c) = 0$.
   Explicar porqué no hay contradicción con el teorema de Bolzano.

3. Demostrar que si a, b y c son reales positivos y $\alpha < \beta < \gamma$, la ecuación

   $$\frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \frac{c}{x-\gamma} = 0$$

   tiene una raíz entre α y β, y otra entre β y γ.

4. *Punto fijo de una función*:
   Un punto c es un punto fijo de una función f si $f(c) = c$.

   a) Sea f una función continua en $[0;1]$ y tal que $\forall x \in [0,1] : 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   Considerando la diferencia $f(x) - x$ y aplicando el Teorema de Bolzano mostrar que f tiene un punto fijo.

   b) Mostrar que, si f es una función continua en el intervalo [a; b] con $f(a) < a$ y $f(b) > b$, entonces f tiene al menos un punto fijo en el intervalo $(a;b)$.

5. Mostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = e^{-x^2} - 2x^2 + \sqrt{x^2+1}$, tiene al menos una raíz y un punto fijo en el intervalo $(0;1)$.

6. Aplicando el teorema de Lagrange (valor medio):

   a) ¿En qué puntos de la gráfica de la logarítmica la tangente es paralela a la cuerda de extremos en los puntos $(e^2, 2)$ y $(e^3, 3)$?

   b) Demostrar que si $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0$ entonces f no tiene más de una raíz real.

7. Calcular los siguientes límites aplicando las reglas de L'Hopital:

   a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan(x)}{1 + x - \cos(x)}$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 + 2x + 2 - 2e^x}$ c) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\text{L}(x) - x + 1}{(x-1)^2}$

8. Sea $f\mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} : f(x) = \mathrm{L}\,|x+2| + x + 1$:

   a) Hallar $f\left([-1;2]\right)$ y probar que $f : [-1;2] \to f\left([-1;2]\right)$ es invertible.

   b) Calcular $\left(f^{-1}\right)'(1 + \mathrm{L}(2))$.

9. Sea
$$g : g(x) = \operatorname{sen}(2x)e^{-x} + \operatorname{tg}(3x)e^{x}$$
   Probar que tiene una única raíz en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ y calcularla con error menor que $0,001$.

10. Probar que la función $\phi(t) = 6\cos(t) + 6e^{t} - t^{2} - 6t - 12$ presenta en 0 un máximo local.