

## Propiedades de la funciones continuas

### 1. Lema de acotación (*Weierstrass*)

Si una función es continua en un intervalo compacto, la imagen de ese intervalo es un conjunto acotado.

$$f \text{ función continua en } [a; b] \Rightarrow f([a; b]) \text{ es acotado}$$

### 2. Teorema de los valores extremos (*Weierstrass*)

Si una función es continua en un intervalo compacto, la imagen de ese intervalo tiene máximo y mínimo.

$$f \text{ función continua en } [a; b] \Rightarrow \exists \text{máx } f([a; b]) \wedge \exists \text{mín } f([a; b])$$

### 3. Teorema de la raíz (*Bolzano*)

Si una función es continua en un intervalo compacto, con imagen positiva en un extremo y negativa en el otro, tendrá al menos una raíz en el interior.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ función continua en } [a; b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (a; b), f(\alpha) = 0$$

### 4. Teorema del punto fijo

Si una función es continua en un intervalo compacto, con imagen en un extremo, mayor que ese extremo, e imagen en el otro extremo, menor que este otro extremo, tendrá al menos una punto fijo en el interior.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ función continua en } [a; b] \\ (f(a) - a)(f(b) - b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (a; b), f(\alpha) = \alpha$$

### 5. Teorema del valor intermedio (*Darboux*)

Dada una función continua en un intervalo compacto y dos números cualesquiera de ese intervalo, todo número comprendido entre las imágenes de ellos será imagen de algún número entre ellos.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ función continua en } [a; b] \\ [\alpha; \beta] \subset [a; b] \\ \text{mín } \{f(\alpha), f(\beta)\} \leq \omega \leq \text{máx } \{f(\alpha), f(\beta)\} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \gamma \in [\alpha; \beta], f(\gamma) = \omega$$

### 6. Corolario - Imagen de un intervalo compacto

Si una función es continua en un intervalo compacto, la imagen de ese intervalo es un intervalo compacto.

$$f \text{ función continua en } [a; b] \Rightarrow f([a; b]) = [\text{mín } f([a; b]); \text{máx } f([a; b])]$$