División Entera - Respuestas I

Respuestas o sugerencias

1. a)

q	r
3	5

b)

q	r
12	0

c)

q	r
0	6

d)

q	r
0	0

e)

r	a
0	80
1	81
2	82
3	83
4	84

f)

b	r
7	3

g) $\nexists(a,q)$

h) $\begin{cases} \forall q \in \mathbb{N} \\ a = 7q + 6 \end{cases}$

q	a
0	6
1	13
2	20
3	27
4	34
5	41
⋮	⋮

i) $\begin{cases} \forall b > 8 \\ a = 8b + 3 \end{cases}$

b	a
9	75
10	83
11	91
12	99
13	107
14	115
⋮	⋮

j) $\nexists(b,r)$

k)

b	q
1	30
2	15
3	10
5	6
6	5
10	3
15	2
30	1

l)

b	q
79	1

2. $\begin{cases} \forall r < 4 \\ x = 5r \end{cases}$

r	x
0	0
1	5
2	10
3	15

3. $\begin{cases} \forall q < 6 \\ x = 36q + q^2 \end{cases}$

q	x
0	0
1	37
2	76
3	117
4	160
5	205

4. I) Verdadero.
   Demostración:
   $a = 1 \times a \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N} : a = 1q \Rightarrow 1 \mid a \quad \square.$

   II) Verdadero.
   Demostración:
   $a = a \times 1 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N} : a = aq \Rightarrow a \mid a \quad \square.$

   III) Verdadero.
   Demostración:
   $$\left.\begin{array}{r} a \mid b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N} : b = aq \\ b \mid a \Rightarrow \exists h \in \mathbb{N} : a = bh \end{array}\right\} \Rightarrow a = (aq)h \Rightarrow a = a(qh) \Rightarrow qh = 1$$
   $q, h \in \mathbb{N} : qh = 1 \Rightarrow q = h = 1 \Rightarrow a = b \quad \square.$

   IV) Verdadero.
   Demostración:
   $$\left.\begin{array}{r} a \mid b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N} : b = aq \\ b \mid c \Rightarrow \exists h \in \mathbb{N} : c = bh \end{array}\right\} \Rightarrow c = (aq)h \Rightarrow c = a(qh) \Rightarrow a \mid c \quad \square.$$

   V) Verdadero.
   Demostración:
   $$\left.\begin{array}{r} a \mid b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N} : b = aq \\ c \mid d \Rightarrow \exists h \in \mathbb{N} : d = ch \end{array}\right\} \Rightarrow bd = (aq)(ch) \Rightarrow bd = (ac)(qh) \Rightarrow ac \mid bd \quad \square.$$

   VI) Verdadero (en nuestro contexto, considerando $c \neq 0$).
   Demostración:
   $a \mid b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N} : b = aq \Rightarrow bc = (aq)c \Rightarrow bc = (ac)q \Rightarrow ac \mid bc \quad \square.$

   VII) Verdadero (en nuestro contexto, considerando $c \neq 0$).
   Demostración:
   $$\left.\begin{array}{r} ac \mid bc \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N} : bc = (ac)q \Rightarrow bc = (aq)c \\ c \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = aq \Rightarrow a \mid b \quad \square.$$

   VIII) Falso.
   Un *contraejemplo* es: $12 \mid 3 \times 8$ pero $12 \nmid 3$ y $12 \nmid 8$.
   ¿Otros *contraejemplos*?

   IX) ....

   X) Verdadero.
   (Sugerencia: Demostrar el *contrarecíproco*, esto es demostrar que
   $a \mid b \vee a \mid c \Rightarrow a \mid bc$)
   Demostración:

5. a) *La suma de dos números pares es un número par.*
   Demostración:

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ es par } \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a = 2n \\ b \text{ es par } \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : b = 2m \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a + b = 2n + 2m \Rightarrow a + b = 2(n + m) \Rightarrow a + b \text{ es par} \quad \square$$

   b) *La suma de dos números impares es un número par.*
   Demostración:

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ es impar } \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a = 2n + 1 \\ b \text{ es impar } \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : b = 2m + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a + b = (2n + 1) + (2m + 1) \Rightarrow a + b = 2(n + m + 1) \Rightarrow a + b \text{ es par} \quad \square$$

   c) *La suma de un número par con un impar es impar.*
   Demostración:

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ es par } \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a = 2n \\ b \text{ es impar } \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : b = 2m + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a + b = 2n + (2m + 1) \Rightarrow a + b = 2(n + m) + 1 \Rightarrow a + b \text{ es impar} \quad \square$$

   d) *El producto de dos números pares es múltiplo de* 4.
   Demostración:

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ es par } \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a = 2n \\ b \text{ es par } \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : b = 2m \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$ab = (2n)(2m) \Rightarrow ab = (2 \times 2)(nm) \Rightarrow ab = 4nm \Rightarrow ab \text{ es múltiplo de } 4 \quad \square$$

   e) *El producto de dos números impares es impar.*
   Demostración:

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ es impar } \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a = 2n + 1 \\ b \text{ es impar } \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : b = 2m + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$ab = (2n+1)(2m+1) \Rightarrow ab = 4nm+2n+2m+1 \Rightarrow ab = 2(2nm+n+m)+1 \Rightarrow$$

$$(ab) \bmod 2 = 1 \Rightarrow ab \text{ es impar} \quad \square$$

   f) *La suma de tres números naturales consecutivos es un múltiplo de* 3.
   Demostración:

$$a \in \mathbb{N} \Rightarrow a, a + 1, a + 2 \text{ son consecutivos.}$$

$$a+(a+1)+(a+2) = 3a+3 = 3(a+1) \Rightarrow a+(a+1)+(a+2) \text{ es múltiplo de } 3 \quad \square$$