Problemas

- Función exponencial

1)

Ejercicio 1.1.12. Durante los años 1990 y 2000 la utilidad anual de la empresa X tuvo un crecimiento exponencial dado por $U(t) = A\,e^{kt}$ en donde $U(t)$ es la utilidad en miles de dólares y t se mide en años. En $t = 0$ (que corresponde al final del ejercico del año 1990) la ganancia fue de 200 mil dólares. La ganancia anual de 1992 fue de 400 mil dólares. Encuentra el año al final del cual la ganancia supera por primera vez los dos millones de dólares.

2)

Ejercicio 1.1.13. Enfriamiento de una taza de café. Una taza de café instantáneo recién servida tiene una temperatura de 82^o. Después de dos minutos permaneciendo en una habitación a 21^o, el café se enfría hasta 74^o. Suponiendo que la temperatura de la taza en cada instante t (medido en minutos) viene dada por: $T(t) = Ae^{kt} + 21$, encuentra las constantes A y k. ¿En qué tiempo llega el café a una temperatura tolerable de 49^o?

3)

Ejercicio 1.1.14. Una tribu que vive aislada en el Amazonas tiene 1100 habitantes. Sorpresivamente es afectada por un virus. A partir de ese momento el tamaño de la población comienza a tener un decrecimiento dado por $P(t) = Ae^{kt} + 100$, en donde $P(t)$ es la cantidad de individuos vivos y t se mide en días. (Estamos suponiendo que en $t = 0$ hay 1100 individuos). Al cabo de dos días sin ayuda sanitaria la población se redujo a 468 personas. Suponiendo que el modelo se mantiene, ¿cuántos habitantes quedarán al cabo de 10 días?

4)

Ejercicio 1.1.16. Un cultivo de bacterias Streptococcus A recién inoculadas (un grupo común de microorganismos que causa infección séptica en la garganta) contiene 100 células. Al chequear el cultivo 60 minutos después se observa que hay 450 células. Suponiendo que dicha población tiene un crecimiento exponencial del tipo $P(t) = a\,e^{kt}$, determina el número de células presentes en cualquier tiempo t (medido en minutos). ¿Cuál es el tiempo requerido para que el número de células se duplique?

5)

Ejercicio 1.1.17. Desintegración radiactiva. Existen muchos modelos físicos que satisfacen una ley de crecimiento o de decrecimiento. Un ejemplo de éstos es la desintegración de elementos radiactivos. A partir de experiencias, los científicos han tomado la siguiente función para expresar la cantidad (masa) de un elemento radiactivo en un instante de tiempo t:

$$y(t) \;=\; A\,e^{kt} \qquad A, k \; constantes, \qquad k < 0$$

El **período de vida media** de un elemento radiactivo es el tiempo requerido para que una cantidad inicial se desintegre a la mitad. Por ejemplo, se ha calculado que el período de vida media para el ^{14}C (carbono catorce) es de 5730 años. Es decir, si se tienen 2 gramos de ^{14}C en la actualidad, dentro de 5730 años quedará aproximadamente 1 gramo. Este período de vida media y el hecho de que los seres humanos continuamente toman ^{14}C, permite que las observaciones con ^{14}C sean útiles para determinar la antigüedad de los objetos.

(a) Sabiendo que la vida media del ^{14}C es 5730 años, deduce que la constante de decrecimiento k vale $k = -(L2)/5730 \cong -1,20968{,}10^{-4}$

(b) Supongamos que en el instante inicial $t = 0$ hay 50 gramos de ^{14}C. Determina la constante A y calcula la cantidad que quedaría después de transcurridos 100 años.

6)

(6) Un isótopo radiactivo se descompone siguiendo una ley dada por la fórmula $y = K \cdot (2{,}7)^{-0{,}00025 \cdot t}$ siendo K la antidad inicial (para $t = 0$) y t el tiempo en años. Si disponemos de 50 gramos inicialmente:

a) ¿Qué cantidad quedará dentro de 10, 100 y 1000 años?

b) ¿Cuál es la vida media de este isótopo?

7)

22 Un biólogo ha estudiado los paramecios, microbios que viven en aguas estancadas y que se reproducen por división transversal: en 24 horas cada paramecio se divide en tres.

En el día 0 se ha contado un millón de paramecios y se estudia la evolución de esta población en función del tiempo.

a) ¿Cuál es el número de individuos de la población en la hora 2?, ¿en la hora 5?, ¿en la hora 12,5?

b) ¿Cuánto tiempo tardará en doblarse? ¿Y en multiplicarse por 10?

8)

24 El número de peces que hay en un lago al cabo de t años de una estimación se supone que sigue la fórmula $p(t) = p \cdot e^{0{,}05t}$.

a) ¿Cada cuánto tiempo se duplica la población?

b) Si la última estimación fue de 50.000 peces se pide:

b1) Representa gráficamente $p(t)$.

b2) ¿Cuántos peces habrá al cabo de 20 años?

- Función Logarítmica

1)

Crecimiento infantil

El modelo Count es una fórmula que sirve para pronosticar la estatura de los preescolares. Si h es la estatura (en cm) y t es la edad (en años), entonces $h = 70{,}228 + 5{,}104t + 9{,}222\log_3^t$ para $\frac{1}{4} \le t \le 6$.
Pronostica la estatura de un niño normal de 2 años de edad.

2)

41 El **nivel de intensidad**, D, de un sonido de *intensidad* I, se obtiene por la expresión:

$$D = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

donde D se mide en *decibelios* e I en watios/m^2. El nivel máximo de percepción o umbral es $I_0 = 10^{-12}$.

a) Calcula el nivel de intensidad de los siguientes sonidos cuya intensidad se da.
   Conversación normal: $3{,}4 \cdot 10^{-6}$
   Sonido trompeta: $2 \cdot 10^{-3}$
   Umbral doloroso: 1
   Fórmula 1: $7 \cdot 10^{2}$

b) Calcula la intensidad de los siguientes sonidos de los que se conoce su nivel en decibelios.
   Grito humano: 80
   Interior discoteca: 115
   Motocicleta: 90

3)

42 La intensidad de los terremotos se expresa en la *escala Richter*. Esta es una escala logarítmica (en base 10) y por tanto un terremoto de grado 4 es 100 veces más intenso que uno de grado 2, pues log 10000 = 4 y log 100 = 2 y 10000 = 100 × 100.

El terremoto de San Francisco de 1906 tuvo una magnitud de 8,2 y en Octubre de 1992 se produjo un terremoto en la costa colombiana de una intensidad de 6,6. ¿Cuántas veces fué mayor la potencia del primero que la del segundo?