Principio de Inducción Completa

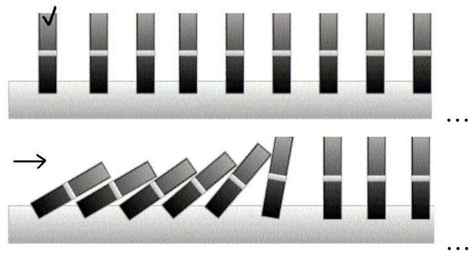
Una proposición $P(n)$, que depende de una variable natural n, será verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$ si se cumplen las dos proposiciones siguientes:

i) *Paso base*: $P(n)$ es verdadera para $n = 0$.

ii) *Paso Inductivo*: Si $P(n)$ es verdadera entonces $P(n+1)$ es verdadera.

En síntesis:

$$\left.\begin{array}{l} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$



Ejemplo

$\forall n \in \mathbb{N} : 3^{2n} - 1 \in \dot{8}$

Demostración por inducción:

i) Paso base: $3^{2\times 0} - 1 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \in \dot{8} \quad \square$

ii) Paso inductivo:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 3^{2n} - 1 \in \dot{8} \Rightarrow 3^{2(n+1)} - 1 \in \dot{8}$$

Demostración. $3^{2(n+1)} - 1 =$ (Distributiva)
$3^{2n+2} - 1 =$ (Exponencial - Suma de exponentes)
$3^{2n} \times 3^2 - 1 =$
$3^{2n} \times 9 - 1 =$ (Necesitamos múltiplos de 8, entonces utilizamos 9 = 8 +1)
$3^{2n}(8+1) - 1 =$ (Distributiva)
$3^{2n} \times 8 + 3^{2n} - 1 =$ (Asociativa)
$3^{2n} \times 8 + (3^{2n} - 1) =$ **(Hipótesis)**
$3^{2n} \times 8 + (3^{2n} - 1)$ (La suma de múltiplos de 8 es múltiplo de 8)
$3^{2(n+1)} - 1 \in \dot{8} \quad \square$

Nota: Si el *paso base* es en un natural n_0 será $\forall n \geqslant n_0 : P(n)$.