Inducción Completa - Ejercicios I

1. Demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

   a) $4^n - 1 \in \dot{3}$
   b) $2^{4n} - 1 \in \dot{15}$
   c) $6^n - 2^n \in \dot{4}$
   d) $3^{2n} - 2^{2n} \in \dot{5}$
   e) $2^{n+2} + 3^{2n+1} \in \dot{7}$
   f) $n^3 - 4n \in \dot{3}$
   g) $n(n+1)(2n+1) \in \dot{6}$
   h) $(2n+1)^2 - 1 \in \dot{8}$
   i) $7^n - 6n - 1 \in \dot{36}$

2. Probar que $\forall n \in \mathbb{N} : 6 \mid n(2n+1)(7n+1)$

3. Demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. Demostrar que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$, se cumple que:

   a) $n^2 > 2n + 1$
   b) $2^n > n^2$
   c) $2^{n+2} < 3^{n+1}$
   d) $2^n < n!$

5. ¿Verdadero o falso?; demostrarlo.
   $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$:

   a) $n^2 - 26n + 168 \geqslant 0$
   b) $n^2 \leqslant 49n + 50$
   c) $2^n > n^2 + 4n + 5$
   d) $n! \leqslant 5^n$
   e) $n^2 - n + 41$ es primo
   f) $n(n+3)(2n+3) \in \dot{5}$

6. Sea x tal que $1 + x \geqslant 0$.
   Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple la *Desigualdad de Bernoulli*:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

7. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 4^{2n-1} + 9^{2n-1} + 32$ no es cuadrado perfecto.

8. Sea a un natural de n dígitos, $a = \overline{x_{n-1}x_{n-2}}...\overline{x_2x_1x_0}$.
   Probar por inducción que:

   a) $2 \mid a \Leftrightarrow 2 \mid x_0$
   b) $5 \mid a \Leftrightarrow 5 \mid x_0$
   c) $3 \mid a \Leftrightarrow 3 \mid x_{n-1} + x_{n-2} + ... + x_2 + x_1 + x_0$