Infinitos

1. Definiciones

1) Una función $f : x \mapsto f(x)$ es un infinito para $x \to \Delta$ si $\lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = \infty$.

2) Si $u : x \mapsto u(x)$ y $v : x \mapsto v(x)$ son infinitos para $x \to \Delta$ y:

   I) $\lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \infty$, decimos que $u(x)$ es de mayor orden que $v(x)$.

   II) $\lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$, decimos que $v(x)$ es de mayor orden que $u(x)$.

   III) $\lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{u(x)}{v(x)} = k \in \mathbb{R}^*$ decimos que $u(x)$ y $v(x)$ son de igual orden.

   IV) $\lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 1$ decimos que $u(x)$ y $v(x)$ son equivalentes.
   Notación: $u(x) \underset{x\to\Delta}{\sim} v(x)$.

3) Si $x \to \infty$ y $p > 0$, x^p es un infinito de orden p.

4) Si $x \to a$ y $p > 0$, $\dfrac{1}{(x-a)^p}$ es un infinito de orden p.

2. Proposiciones

1. La suma de infinitos de distinito orden es un infinito equivalente con el de mayor orden.

$$u(x) \underset{x\to\Delta}{\to} 0 \wedge v(x) \underset{x\to\Delta}{\to} 0 \wedge \lim_{x\to\Delta} \frac{u(x)}{v(x)} = 0 \Rightarrow u(x) + v(x) \underset{x\to\Delta}{\sim} v(x)$$

2. *Sustitución por equivalentes.*
   El límite no cambia si se sustituye un infinito factor o divisor por otro equivalente.

   I) $u(x) \underset{x\to\Delta}{\sim} v(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\Delta} h(x)u(x) = \lim\limits_{x\to\Delta} h(x)v(x)$.

   II) $u(x) \underset{x\to\Delta}{\sim} v(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \lim\limits_{x\to\Delta} \dfrac{h(x)}{v(x)}$.

3. Límites fundamentales

1) $\forall p > 0, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty.$

2) $\forall p > 0, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{p}}}{\text{Ł}(x)} = +\infty.$

4. Direcciones asintóticas

Dada $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
Comparando el *infinito* f con la *identidad* definimos:

- Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, decimos que la gráfica de f presenta *dirección asintótica paralela al eje Ox.*
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}^*$, decimos que la gráfica de f presenta *dirección asintótica de pendiente m.*
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, decimos que la gráfica de f presenta *dirección asintótica paralela al eje Oy.*

5. Asíntotas oblicuas

Dada $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0$.

Proposición

Si $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx) = n \in \mathbb{R}$ entonces la recta de ecuación $y = mx + n$ es asíntota a la gráfica de f.