# Cadena de Equivalentes

Vamos a probar la equivalencia de algunos infinitésimos. Como las demostraciones se apoyan en la demostración del equivalente anterior, de ahí el nombre de Cadena de equivalentes.

Las generalizaciones de estas demostraciones son las que contiene el Formulario de equivalentes que usamos para los ejercicios. Allí también se encuentran los corolarios de estos teoremas que vamos a demostrar.

Las generalizaciones se demuestran realizando cambio de variable en el límite.

Por ejemplo:

$\boxed{e^x - 1 \sim x, \text{ cdo. } x \to 0}$ --- Generalización: $e^u - 1 \sim u\ ,\ u \to 0$

--- Corolarios: $a^u - 1 \sim u.La\ ,\ u \to 0$

$$e^u - e^v \sim e^v(u - v)\ ,\ (u\text{-}v) \to 0$$

$$a^u - a^v \sim a^{\square}.La.(u - v)\ ,\ u \sim v \sim \square$$

**1)** Vamos a partir del Teorema que prueba que el límite de una sucesión $(a_n)$ de término general: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tiene límite el número e.

Es decir: $lím \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Este teorema en realidad, es parte de una de las varias demostraciones matemáticas que determinan al número irracional e.

Puede entonces, probarse que: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Luego, también se prueba que: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

Y por último, con Cambio de Variable se prueba:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

**2)** $$\boxed{L(1+x)\sim x,\ \text{cuando}\ x\to 0}$$

Demostración:

$$\lim_{x\to 0}\frac{L(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.L(1+x)=\lim_{x\to 0}L(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

Propiedad de logaritmos

por 1): e

**3)** $$\boxed{e^{x}-1\sim x,\ \text{cuando}\ x\to 0}$$

Demostración:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\left|\begin{array}{l}e^{x}-1=z\\ e^{x}=1+z\\ x=L(1+z)\end{array}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{z}{L(1+z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{L(1+z)}{z}}=1$$

por 2): 1

**4)** $\boxed{(1+x)^m - 1 \sim mx, \text{ cuando } x \to 0,\ m \in R}$

Demostración:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m - 1}{mx} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\overbrace{mL(1+x)}^{\to 0}} - 1}{mx} = \lim_{x\to 0}\frac{mL(1+x)}{mx} = \lim_{x\to 0}\frac{L(1+x)}{x} = 1$$

$$u^v = e^{vLu}$$

por 3)

por 2)