Punto de aglomeración - Punto de acumulación - Límite

❖ *Punto de aglomeración, de adherencia* o adherente

- Definición:

aϵR, se denomina *punto de adherencia* de un conjunto A $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R^{+},\ E(a,\varepsilon) \cap A \neq \phi$

(O sea, todo entorno de a intersección A, no es vacío.)

- Definiciones de punto de adherencia en Sucesiones:

1) Dado el Recorrido de una sucesión: $\{a_n\}$, decimos que $h \in R$ es punto de aglomeración siempre que $\forall \varepsilon > 0$ y $n_0 > 0$, existe $n > n_0$ que verifica que $a_n \in (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$.

Observación 1.
$(h - \varepsilon, h + \varepsilon) = \{x \in R : h - \varepsilon < x < h + \varepsilon\}$ es equivalente a que $|a_n - h| < \varepsilon$.
Puede resultar complicado comprender que la definición de punto de aglomeración es una propiedad en el "infinito" porque dados el valor de ε y n_0, basta con encontrar un elemento de la sucesión se acerque a menos de ε de h. La razón por la cual es efectivamente un comportamiento a largo plazo es justamente el hecho de que elegimos el valor de n_0 y que n tiene que ser mayor que este.

2) aϵR, es punto de adherencia (o punto de aglomeración) de la sucesión (a_n) cuando es límite de alguna subsucesión de (a_n).

- Ejemplos:

1) En R, 1 es un punto de adherencia del intervalo cerrado [0,1]. También lo es del intervalo abierto (0,1).

2) En R, el supremo y el ínfimo de un conjunto, son puntos adherentes a ese conjunto.

(**Axioma de Completitud:** *"Cada conjunto no vacío de números reales que está acotado superiormente tiene extremo superior o Supremo." En consecuencia si está acotado inferiormente, tiene extremo inferior o Ínfimo.)*

3) Sea el conjunto A = {5} U (1; 3). Respecto a la topología usual de $\mathbb{R}$, sus puntos adherentes son: 5, y todos los puntos del intervalo cerrado [1;3]; además 5 es punto aislado de A y los puntos 1 y 3 son puntos exteriores de A. Y el conjunto Adherencia (conjunto de puntos de adherencia) es Adh(A) = {5}U[1;3] que es cerrado por ser unión de dos cerrados.

❖ *Punto de acumulación*

- Definición:

Sea $A \subset R$ y $a \epsilon R$, decimos que a es un punto de acumulación de A $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R^{+}, E^{*}(a,\varepsilon) \cap A \neq \phi$.

O sea, todo entorno reducido de a tiene puntos de A.
En cada entorno de a, hay por lo menos un punto de A diferente de él. Esto implica que en todo entorno de a hay infinitos puntos de A.

- Ejemplos:

1) A = (a , b)

Todos los puntos de [a; b] son de acumulación de A.

2) A=Q (Racionales)

Todo real es punto de acumulación de Q.

3) A = {x=1/n, nϵN}

El único punto de acumulación de A es 0.

4) A=N

A no tiene puntos de acumulación.

Teorema (Bolzano-Weierstrass):
Todo conjunto infinito y acotado tiene un punto de acumulación.

- En R^n:

Punto de Acumulación

Definición: Sea A un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$, se dice que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A si toda bola abierta con centro $\bar{x}$ contiene un punto A distinto de $\bar{x}$. Dicho de otro modo si $\forall \quad r > 0$ se tiene que

$$B(\bar{x}, r) - \{\bar{x}\} \cap A \neq \varnothing$$

Al conjunto de puntos de acumulación de A se le denomina el conjunto derivado de A (A^a Notación).

Nota: Según la definición un punto de acumulación de A no necesariamente es punto de A. Un punto de la adherencia de A que no es elemento de A es un punto de acumulación de A. Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A entonces por definición, toda bola abierta $B(\bar{x}, r)$ tiene al menos un punto de A que no es $\bar{x}$.

Ejemplos :

1. Si $A = (a, b)$ entonces $A^a = [a, b]$
2. Si $A = [0, 1) \cup \{2\}$ entonces $A^a = [0, 1]$
3. Si $A = \left\{ \frac{1}{k} \middle| k \in \mathbb{N} \right\}$ entonces $A^a = \{0\}$
4. Si $A = \mathbb{Q}$ (Racionales) entonces $A^a = \mathbb{R}]$ (Reales)
5. Si $A = \mathbb{R}$ entonces $A^a = \mathbb{R}$

Ejemplos en $\mathbb{R}$:

a) El conjunto de puntos de acumulación de toda bola abierta $B(\bar{x}, r)$ es la bola cerrada $\bar{B}(\bar{x}, r)$.
b) El conjunto de puntos de acumulación de toda bola cerrada $\bar{B}(\bar{x}, r)$ es de ella misma.
c) Si $A = \underbrace{\mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}}_{\text{n-veces}}$ entonces $A^a = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$

Lema: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es punto e acumulación de A si y solamente si $\bar{x} \in \overline{A - \{\bar{x}\}}$

Demostración: Si $\bar{x}$ es un punto de acumulación de A entonces $\quad \forall r > 0 \quad B(\bar{x}, r) - \{\bar{x}\} \cap A \neq \varnothing$ esta expresión es equivalente a

$$B(\bar{x}, r) \cap A - \{\bar{x}\} \neq \varnothing$$

por lo que

$$B(\bar{x}, r) \cap \{\bar{x}\}^c \cap A = [B(\bar{x}, r) \cap \{\bar{x}\}^c] \cap A = B(\bar{x}, r) \cap A - \{\bar{x}\} \neq \varnothing$$

pero esto significa que $\bar{x}$ es un punto de adherencia de $A - \{\bar{x}\}$
$\therefore \quad \bar{x} \in \overline{A - \{\bar{x}\}}$

Proposición: Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A, entonces toda bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contiene una infinidad de puntos de A.

Facultad de Ciencias UNAM — Prof. Esteban Rubén Hurtado Cruz
Cálculo Diferencial e Integral III

Conclusiones:

1) El concepto de punto de aglomeración es más general que el de punto de acumulación x, ya que este último requiere que todo conjunto abierto que contenga a *x* contenga al menos un punto de *A* pero *diferente de x*.

Todo punto de acumulación es un punto de aglomeración (adherente o de adherencia), pero el recíproco no es siempre cierto.

x es punto de acumulación de A si todo entorno de $x \in A$ contiene a puntos de A distintos de x.

x es punto de adherencia de A si todo entorno de $x \in A$ contiene a puntos de A (no necesariamente distintos de x).

Por tanto:

- Todo punto de A es de adherencia de A.
- Todo punto de acumulación es de adherencia.
- No todo punto de adherencia es de acumulación. Por ejemplo con la topología usual de $\mathbb{R}$, 1 es punto de adherencia de los naturales pero no es de acumulación.

2)

Cabe agregar que $\bar{A} = A \cup A'$, o sea, el conjunto de puntos de adherencia del conjunto es la unión de los puntos del conjunto en cuestión y los de acumulación (unión que no tiene por qué ser disjunta).

Un punto adherente de *A* es o bien un punto de acumulación de *A* o bien un elemento de *A* (o los dos). Un punto adherente que no es un punto de acumulación es un punto aislado.

Ejemplos:

1) $(a_n): a_n = (-1)^n$. El Recorrido de $(a_n): \{a_n\} = \{-1, 1\}$

-1 y 1 son puntos de adherencia o aglomeración.

No tiene puntos de acumulación.

-1 y 1 son puntos aislados.

2) $(a_n): a_n = \frac{1}{n}, n \in N^*$

El Recorrido de $(a_n): \{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$.

0 es punto de aglomeración y acumulación.

Todos los elementos de $\{a_n\}$ son de adherencia, pero ninguno de acumulación.

3) $A = \left\{x / x = \frac{(-1)^n}{n}, n \in N^*\right\}$

Entonces $A = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$.

Todos sus elementos son puntos de aglomeración.

0 es punto de acumulación.

4) $(a_n): a_n = \begin{cases} 1, \ n \ par \\ \frac{1}{n}, \ n \ impar \end{cases}$

Miremos los primeros términos de la sucesión: $1, 1, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{5}, 1, \frac{1}{7}, 1, \ldots$ O sea: $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \ldots\right\}$.

Todos los elementos de $\{a_n\}$ son puntos de aglomeración.

0 es punto de acumulación.

Observemos que el punto de acumulación no tiene por qué ser Ínfimo o Supremo del conjunto.

En el ejemplo 2), 0 sí es Ínfimo pero en el ejercicio 3) no.

❖ *Límite*

- Límite de sucesiones:

Agreguemos el concepto de límite ahora.
En los ejemplos 2) y 3) anteriores, $\text{lím}\, a_n = 0$.
Si pensamos un poco en la definición de límite de sucesiones:
$\text{lím}\, a_n = L \Leftrightarrow Dado\ \varepsilon \in R^+, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0,\ n \in \mathbb{N},\ a_n \in E_{L,\varepsilon}$, podemos observar que los límites son también puntos de acumulación.

En el ejemplo 1), no hay límite.
En el ejemplo 4), 0 es punto de acumulación pero no es límite.

- Límite de funciones:

Ahora pensemos en límites de los Recorridos de las funciones:

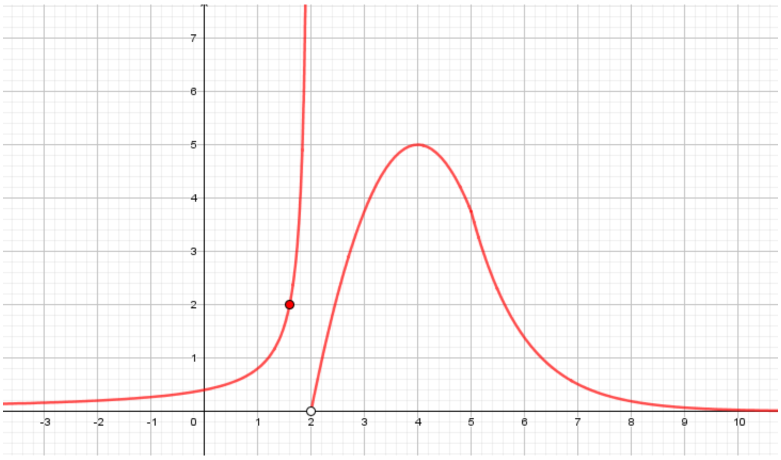
$$\underset{x \to a}{\text{lím}}\, f(x) = L \Leftrightarrow Dado\ \varepsilon \in R^+, \exists\, \partial \in R^+ / \forall x \in E^*_{a,\partial},\ f(x) \in E_{L,\varepsilon}$$

También se deduce que el límite es punto de acumulación del R(f).

$$\boxed{\underset{x \to a}{\text{lím}}\, f(x) = L \Rightarrow L\ es\ punto\ de\ acumulación\ de\ R(f)}$$

Obsérvese que no es recíproco. Los puntos de acumulación no son siempre límites.

Ejemplos:
1) Sea el gráfico de f:



R(f)=(0,+∞)

- $\underset{x \to 4}{\text{lím}}\, f(x) = 5$.

5 es un extremo superior relativo, por ejemplo es extremo superior del R(f), cuando x $\in$(2,9). Es más, es máximo relativo.
5 es punto de acumulación de R(f).
5 es punto de adherencia.

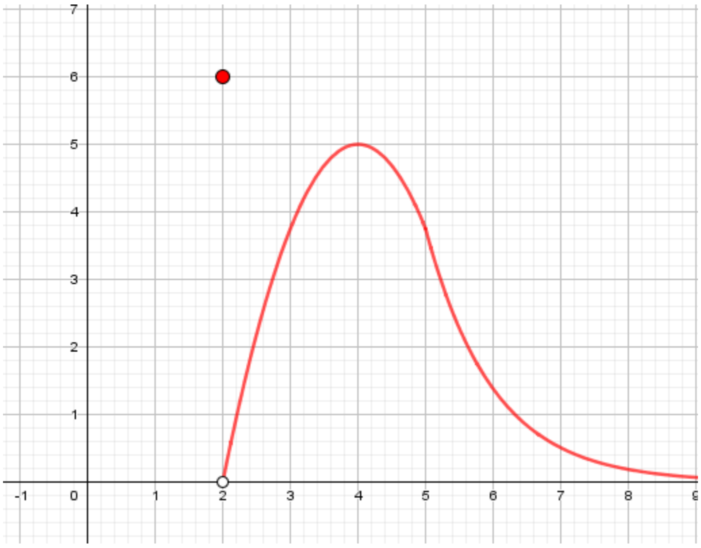
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2^+ \\ x \to \pm\infty}} f(x) = 0^+$

0 es extremo inferior de R(f), no es mínimo de R(f).
0 es punto de acumulación de R(f).
0 no pertenece a R(f) pero es punto de aglomeración.

- $\lim\limits_{x \to 1,6} f(x) = 2$

2 no es extremo relativo ni cota de R(f).
2 es punto de acumulación de R(f).
2 es punto de aglomeración de R(f).

2) Sea el gráfico de f:



R(f)=(0,5] ∪ {6}

- $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 5$.

5 es un extremo superior relativo, por ejemplo es extremo superior del R(f), cuando x ϵ(2,9). Es más, es máximo relativo.
5 es punto de acumulación de R(f).
5 es punto de adherencia.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2^+ \\ x \to +\infty}} f(x) = 0^+$

0 es extremo inferior de R(f), no es mínimo de R(f).
0 es punto de acumulación de R(f).
0 no pertenece a R(f) pero es punto de aglomeración.

- 6 no es un límite.

6 es un punto de aglomeración.
6 es un punto aislado.
6 no es un punto de acumulación.