Definiciones de conjunto Cerrado:

1) Un conjunto cerrado es un conjunto cuyo complemento es un conjunto abierto.

Definición. Un conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es abierto si para cada $\bar{x} \in V$ existe una bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contenida en V. Es decir si para cada $\bar{x} \in V$ existe $r > 0$ tal que $B(\bar{x}, r) \subset V$.

Definición. Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es cerrado si su complemento $F^c = \mathbb{R}^n - F$ es un conjunto abierto.

Ejemplo: El espacio $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, pues dado cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, toda bola abierta $B(\bar{x}, r)$ esta contenida en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: el $\emptyset$ es abierto.

2) Un conjunto es cerrado si solo si contiene todos sus puntos límite.

3) Un conjunto es cerrado si y solo si contiene todos sus puntos de frontera.

(Un **punto** es de **frontera** en un conjunto si no es ni interior ni es exterior, es decir si trazando una vecindad de radio cualquiera centrada en el **punto** tengo **puntos** del conjunto y **puntos** que no son del conjunto.)

- R^n y Φ son conjuntos abiertos y cerrados.

- En FING:

4 Abiertos y cerrados

✓ **Definición 4.1** CONJUNTO ABIERTO *Un conjunto $H \subset M$ se dice abierto en el espacio métrico M si todos los puntos de H son interiores a H.* ✓

✓ Dicho de otras formas:

H es abierto si y solo si los puntos de frontera o borde de H, o bien no existen, o bien no pertenecen a H.

El conjunto H coincide con su interior. ✓

✓ *Por convención el conjunto vacío se considera abierto.* ✓

✓ **Definición 4.2** CONJUNTO CERRADO *Un conjunto $H \subset M$ se dice cerrado en el espacio métrico M si la clausura o adherencia de H coincide con H*✓

✓ Dicho de otra forma:

H es cerrado si y solo si los puntos de frontera o borde de H, o bien no existen, o bien pertenecen todos a H. ✓

✓ *Por convención el conjunto vacío se considera también cerrado.* ✓

✓ **Nota 4.3** El concepto de conjunto abierto no es lo opuesto al concepto de conjunto cerrado. Un conjunto H en un espacio métrico métrico fijo dado M, puede ser abierto y no cerrado, o ser cerrado y no abierto, o ser abierto y cerrado al mismo tiempo, o no ser ni abierto ni cerrado al mismo tiempo. En efecto, estúdiense los ejemplos del ejercicio siguiente. ✓

✓ **Ejercicio 4.4** Sea en el espacio métrico de los reales $\mathbb{R}$ con la distancia usual, el conjunto $H \subset \mathbb{R}$ descripto en cada parte:

a) $H = [2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$. Probar que H es cerrado y no abierto.

b) $H = (-\infty, 1) = \{x \in R : x < 1\}$. Probar que H es abierto y no cerrado.

c) $H = [1, 2)$. Probar que H no es abierto ni cerrado.

d) $H = \mathbb{R}$. Probar que H es abierto y cerrado. ✓