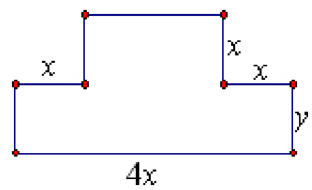
Aplicaciones del Cálculo - Ejercicios I

1. De los rectángulos de 1m^2 de área hallar el de perímetro mínimo.

2. De los rectángulos de perímetro p constante hallar el de área máxima.

3. Con dos rectángulos se forma la figura adjunta que debe tener un perímetro de 36m. Calcular sus lados para que su área sea máxima.



4. Demostrar que de los rectángulos que pueden inscribirse en una circunferencia dada, el cuadrado es el de área y perímetro máximos.

5. Entre todos los rectángulos de 1m de perímetro, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?

6. Entre todos los triángulos isósceles de 1m perímetro, ¿cuál es el de mayor área?

7. Una ventana debe tener la forma de un trapecio isósceles, con la base mayor el triple de la base menor y un perímetro de 8m. Calcular las bases y la altura para que su área sea la mayor posible.

8. Con un alambre de 4m de longitud se formará un cuadrado y un círculo. ¿Qué longitud de alambre debe usarse para el cuadrado y qué longitud para el círculo a fin de abarcar la máxima área total?

9. Determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en la elipse de ecuación cartesiana $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.

10. En una circunferencia de centro O y radio 1, tomemos una cuerda de longitud a y la circunferencia C que tiene a dicha cuerda por diámetro. Si P es el punto de C más alejado de O, ¿cuál es el valor máximo de la distancia entre O y P?

11. Con una chapa rectangular se quiere construir una caja sin tapa recortando las esquinas y doblando los bordes; calcular los cortes para que el volumen resultante sea el mayor posible.

12. Determinar el cilindro de máximo volumen que puede inscribirse en una esfera de radio r constante.
    Respuesta: altura $2\sqrt{3}r/3$.

13. Determinar las dimensiones de un cilindro circular recto de máximo volumen que puede inscribirse en un cono circular recto de radio r y altura h.
    Respuesta: radio $2r/3$, altura $h/3$, volumen máximo $4\pi hr^2/27$.

14. Estudiar la variación del volumen de los conos rectos de base circular cuya longitud de generatriz es constante.

15. Una plataforma petrolífera se encuentra a 20km de la costa debe ser conectada a una refinería que esta a 32km en línea recta desde el punto mas cercano a la plataforma. Si instalar la tubería debajo del agua cuesta U$S 350mil por cada kilómetro, y en tierra cuesta U$S 200mil por kilómetro, ¿qué combinación de instalación subacuática y terrestre da la conexión más económica?

16. Dos columnas de 12m y 18m de altura distan entre sí 30m. Se tiene que tender un cable que una un punto del suelo entre las dos columnas con los extremos de estas. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?

17. La velocidad v, con que los pájaros devoran ciertos tipos de gusanos viene dada por
$$v\left(N\right)=\frac{7N}{N^2+16}$$
siendo N la concentración de gusanos.
Calcular qué concentración de gusanos será más rápidamente devorada por los pájaros.

18. El Ministerio de Transporte con el fin de determinar la variación de la velocidad del flujo de vehículos que provenientes del Este regresan a Montevideo los días domingos entre las 17:00 h y las 22:00 h, ha efectuado mediciones que indican que la velocidad del tránsito a la entrada de la capital en ese lapso está dada aproximadamente por la función:
$$v(t)=\frac{80}{9}\left(t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right)+\frac{1180}{27}$$
¿En qué momento entre las 17:00h y las 22:00h el tránsito es más rápido y en qué momento es más lento?

19. Un estudio sobre la eficiencia de los trabajadores del turno matutino de una fábrica indica que el número N de artículos ensamblados por un trabajador promedio está dada por la función:
$$N(t)=-t^3+6t^2+15t$$
siendo t el tiempo transcurrido desde el inicio (8:00h) al final del turno (13:00h)
    a) Graficar la curva de producción $t\mapsto N(t)$ para $0\leqslant t\leqslant 5$.
    b) ¿A qué hora de la mañana la tasa de producción del trabajador es máxima y a qué hora es mínima?

20. Después de t horas de instrucción un estudiante típico puede escribir $p(t)$ palabras por minuto. La función es $p(t)=\dfrac{70t^2}{t^2+30}$; estudiarla y sacar conclusiones.

21. La difusión en redes sociales en el tiempo viene dada por la *función logística simple*:

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-(t-6)}}$$

donde P es la *población* y t el tiempo, $t \in [0; 12]$.
Estudiar la función y sacar conclusiones.

22. *Masa relativista*: Albert Einstein demostró que la masa de un cuerpo es función de su velocidad en la siguiente forma:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

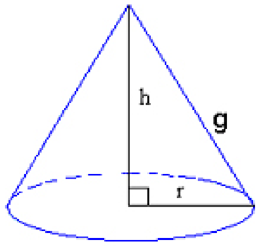
siendo m_0 la masa del cuerpo en reposo y c la velocidad de la luz ($c = 300.000$km/s).
Estudiar la función y sacar conclusiones.

23. Consideramos las dimensiones aproximadas de tres envases cilíndricos de productos en el mercado:

	Diámetro (cm)	Altura (cm)	Capacidad (cm^3)
Arvejas E	7.5	8.5	375
Atún T	10	5	393
Refresco C	6.4	11	354
Cerveza P	6.4	14.7	473
Duraznos R	10	11.5	903

Determinar si las dimensiones en diámetro y altura son óptimas, en cuanto a su superficie, para obtener la capacidad indicada en cada caso.
¿Cuál está, en proporción, más cerca de la óptima? ¿Qué podría motivar que las dimensiones sean o no las óptimas?

24. UdelaR/FIng/IMERL/Cálculo 1/Examen - 21/07/2017
Una forma usual para las copas de vermouth es la de la figura. Se trata de un cono invertido, puesto sobre un pie.



El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura.
El área lateral del cono es $A = \pi r g$, donde g es la generatriz (ver figura).
Se desea fabricar una copa con una cantidad fija de cristal, lo que determina que el área lateral del cono es igual a una constante A_0.
Hallar, en función de A_0, el valor de r que maximiza el volumen de la copa fabricada.
(Sugerencia: A los efectos de simplificar sensiblemente los cálculos, maximizar V^2, lo cual equivale a maximizar V, puesto que $x \mapsto x^2$ es creciente en $\mathbb{R}^+$).
Respuesta: $r = \sqrt{\frac{A_0}{\sqrt{3}\pi}}$.