Funciones Reales – Ejercicios VIII

1. Dadas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $g(x)=1-x$ y $h=f\circ g$.
Mostrar que h es invertible, hallar la fórmula de $h^{-1}(x)$ y graficar h^{-1}.

2. Graficar y estudiar las siguientes funciones $f: D\to\mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x)=\left|x^3-2\right|$ b) $f(x)=\left|\sqrt{x}-2\right|$ c) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}-1$

d) $f(x)=\left|x-|x|\right|$ e) $f(x)=\left|\left||x|-1\right|-1\right|$ f) $f(x)=\left|x^2+2|x|\right|$

g) $f(x)=|x|-|x-2|$ h) $f(x)=\sqrt{|x|}$ i) $f(x)=\left|1-\sqrt{|x|+1}\right|$

j) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+|x|}{2}}$ k) $f(x)=\left(\operatorname{sgn}(x)+1\right).x^2$ l) $f(x)=\sqrt[3]{x-\operatorname{sgn}(x)}$

3. Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $h(x)=|x-1|+\left|x^2-1\right|$:

a) Graficar y estudiar la función h.
b) Discutir en función de λ, el número de raíces de la ecuación $h(x)=\lambda$.

4. Sea $\varphi:\mathbb{R}\to(-1;1)$ tal que $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$:

Probar que φ es impar, estrictamente creciente, biyectiva e invertible.
Hallar la definición explícita de φ^{-1}.

5. Graficar y estudiar la función $\mathrm{s}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $\mathrm{s}(x)=\operatorname{sen}(\pi x)$

6. Hallar raíces y estudiar los signos de las siguientes funciones $f: D\to\mathbb{R}$ definidas por:

a) $f(x)=e^x-\mathrm{L}|x+1|$ b) $f(x)=3-\sqrt{|x-2|}-x^2$ c) $f(x)=x^2-x-\operatorname{Arctg}(x)$

7. Hallar raíces y estudiar los signos de $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}: g(x)=\mathrm{L}\left(x^2\right)+x-2$

8. a) Resolver en $\mathbb{R}$: $x\,\mathrm{L}(x)<1$ b) Resolver en $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$: $\sqrt{x}\geq\operatorname{tg}(x)$.

9. Hallar las raíces y estudiar signos de

$$\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\omega(x)=1-2\operatorname{sen}(2x).$$

(Respuestas: Raíces α_k y β_k con $\alpha_k=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$, $\beta_k=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$ y $k\in\mathbb{Z}$.)

10. Hallar las raíces y estudiar signos de

$$x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x(t)=4\operatorname{sen}^2(t)+4\cos(t)-1.$$

11. a) Probar que la suma de funciones crecientes es una función creciente.
b) ¿Se cumple lo anterior para funciones decrecientes? Demostrarlo.
c) ¿Se cumplen los anteriores para el producto? Demostrarlo.
d) Probar que la composición de funciones crecientes es una función creciente.
e) ¿Se cumple lo anterior para funciones decrecientes? Demostrarlo.
f) ¿Y si las funciones varían en distinto sentido? Demostrar.
g) Probar que si una función es invertible y creciente (o decreciente) su inversa es creciente (o decreciente).

12. **Algunas funciones especiales**

Estudiar, clasificar y graficar las siguientes funciones:
a) Función *piso* o *parte entera*:
$\mathrm{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$, $\mathrm{p}(x)$ es el mayor entero menor o igual que *x*.
(Notación: $\mathrm{p}(x)=\lfloor x\rfloor$)
b) Función *techo*:
$\mathrm{t}:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}, \mathrm{t}(x)$ es el menor entero mayor o igual que *x*.
(Notación: $\mathrm{t}(x)=\lceil x\rceil$)
c) Función "*dientes de sierra*": $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$
d) Función de *Dirichlet*:
$f:\mathbb{R}\to\{0,1\}$
Si $x\in\mathbb{Q}$ entonces $f(x)=0$
Si $x\notin\mathbb{Q}$ entonces $f(x)=1$

Andrés Abreu