Divisibilidad – Ejercicios IV

1. Hallar $a, q, r \in \mathbb{N}$ que cumplan:

$$\begin{cases} (a+12)\operatorname{div} 7 = q \\ (a+12)\operatorname{mod} 7 = r \\ (a+18)\operatorname{div}(r+8) = q-4 \\ (a+18)\operatorname{mod}(r+8) = 12 \end{cases}$$

2. Probar que el sucesor o el anterior de un número primo mayor a 3 es múltiplo de 6.

3. Hallar z y sus divisores, sabiendo que $z = 2^{\alpha}.5^{\beta}$, $5z$ tiene 16 divisores y $3z$ tiene 24.

4. Hallar el número natural m sabiendo que $m = 3^{\alpha} \times 21^{\beta}$, tiene 30 divisores y que $3m$ tiene 35 divisores.

5. Se llaman *número perfectos* a los números que son iguales a la suma de todos sus divisores propios. Mostrar que 6, 28 y 496 son perfectos. ¿Existen otros?

6. Probar que la proposición "$\forall n \in \mathbb{N} : 2^{2^n} + 1$ es primo" es falsa.

7. Hallar (a; b) sabiendo que MCD(a, b) = 18, a tiene 21 divisores y b tiene 10.

8. Probar que si de los números naturales desde el 100 al 199 se eligen 51 números cualesquiera, al menos dos de ellos serán coprimos.

9. Probar que si x es primo y $x \mid ab$ entonces $x \mid a$ o $x \mid b$.

10. Hallar las parejas (a, b) de números naturales que cumplen:

a) $\begin{cases} \text{MCD}(a,b) = 15 \\ a^2 - b^2 = 12375 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \text{MCD}(a,b) + \text{mcm}(a,b) = 1328 \\ a = 11.\text{MCD}(a,b) \\ b = 15.\text{MCD}(a,b) \end{cases}$ c) $\begin{cases} a+b = 73.\text{MCD}(a,b) \\ a-b = 17.\text{MCD}(a,b) \\ \text{mcm}(a,b) = 25200 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{mcm}(a,b) = 105 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{21} \end{cases}$ e) $\begin{cases} \text{mcm}(a,b) = 330.\text{MCD}(a,b) \\ a+b = 1271 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \text{mcm}(a,b) = 168 \\ ab = 1008 \end{cases}$

11. a) Hallar la pareja (x, y) de naturales que cumplen:

$$\begin{cases} \text{MCD}(x,y) > 1 \\ x^3 - y^3 = 1647 \\ 13y - 9x = 21 \end{cases}$$

b) Hallar los z tales que mcm(x, z) = 165, siendo x el hallado en la parte anterior.

12. Hallar x sabiendo que tiene 9 divisores, x div 39 es primo y x mod 39 = 1.

13. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$:
Probar que si $\text{MCD}(a,b) = 1$, $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $ab \mid c$.

14. Probar que MCD(a, b) = 1 y MCD(a, c) = 1 si y solo si MCD(a, bc) = 1.

15. Probar que si a y b son coprimos entonces $a + b$ y ab también son coprimos.