Sucesiones Reales - Sumas Parciales - Ejercicios II

1. Desarrollar y calcular las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=1}^{i=8} i^2$

b) $\sum_{i=0}^{i=6} (2i^2 + 3i - 1)$

c) $\sum_{i=1}^{i=10} \frac{1}{i}$

d) $\sum_{i=0}^{i=7} 2^i$

e) $\sum_{i=3}^{i=8} \frac{1}{3^i}$

f) $\sum_{i=0}^{i=5} \frac{1}{i!}$

2. Expresar las siguientes sumas con el operador de sumatoria Σ:

a) $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$

b) $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27$

c) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

d) $1 + 8 + 27 + 64 + 125 + ... + 1000$

e) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$

f) $a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + a_{p+4} + a_{p+5} + a_{p+6} + a_{p+7}$

g) $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7$

3. Demostrar por inducción completa que $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) $\sum_{i=0}^{i=n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

4. Calcular:

a) $\sum_{i=0}^{i=100} i^2$

b) $\sum_{i=40}^{i=100} 3i^2$

c) $\sum_{i=40}^{i=100} (3i^2 + 5i - 3)$

5. Dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n = 3n^2 + 2$

a) Hallar una fórmula para calcular $\sum_{i=0}^{n} x_i$ en función de n.

b) Calcular $\sum_{i=0}^{50} x_i$.

c) Calcular el menor valor de p que cumple $\sum_{i=0}^{p} x_i > 10^4$.

d) Hallar los valores de n para los que $\sum_{i=0}^{n} x_i < x_{100}$.

6. Dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n = (n+1)(2n+3)$

   a) Deducir una fórmula para su suma parcial.

   b) Calcular $\sum_{i=40}^{i=100} x_i$.

7. *Área de una figura plana*
   El área como límite de la suma de una sucesión de áreas de rectángulos:

   a) Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$, representarla gráficamente y calcular el área bajo la curva en el intervalo $[0; 1]$.

   b) Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -x^2 + 4x + 2$, representarla gráficamente y calcular el área bajo la curva en el intervalo $[0; 3]$.

   c) Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^3$, representarla gráficamente y calcular el área bajo la curva en el intervalo $[0; 1]$.

8. Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, estudiar su monotonía, investigar cotas y extremos, hallar una fórmula para el término general y calcular su límite:

   a) $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 3 - 2x_n \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3}{5} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2 + 1} \end{cases}$

9. Demostrar por inducción completa que:

   a) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{k=n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right) = \dfrac{n}{n+1}$

   b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión real, $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{k=n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$

10. Sea
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : x_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
    Probar que $\forall n \in \mathbb{N}^* : x_n \geqslant \sqrt{n}$ y deducir el $\lim x_n$.

11. *Número de Euler*
    Investigar el límite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} : y_n = \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{k!}$