

Sucesiones Reales - Sumas Parciales - Ejercicios III

1. Demostrar por inducción completa que $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{i=0}^{i=n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

b) $\sum_{i=0}^{i=n} aq^i = a \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

2. Aplicando la suma geométrica calcular:

a) $2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + \dots + 2^{30}$

b) $\frac{2}{3^9} + \frac{2}{3^{10}} + \frac{2}{3^{11}} + \frac{2}{3^{12}} + \dots + \frac{2}{3^{33}}$

3. Aplicando el límite de la suma geométrica probar que:

a) $0, \bar{9} = 1$

c) $2, \bar{7} = \frac{25}{9}$

e) $0, \overline{064935} = \frac{5}{77}$

b) $0, \bar{5} = \frac{5}{9}$

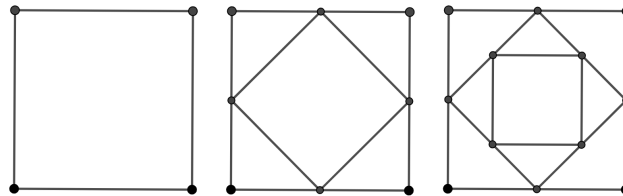
d) $5, \overline{17} = \frac{512}{99}$

f) $1, \overline{23123} = \frac{410}{333}$

4. Deducir una fórmula para calcular $s_n = \sum_{i=0}^{i=n} (3^i - 3^{-i})$ y resolver $s_n \leq 29529$.

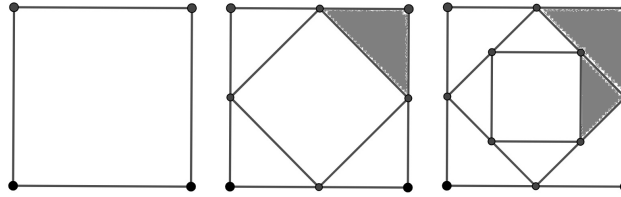
5. Considerar un cuadrado de lado a .

Si se unen los puntos medios de sus lados adyacentes se obtiene otro cuadrado.



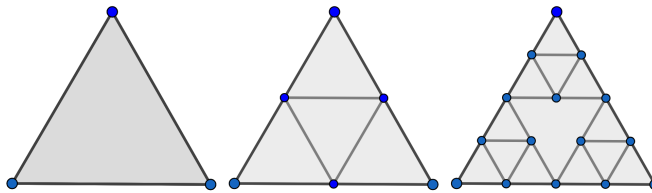
Considerar la familia de cuadrados que se obtiene al repetir lo anterior n veces:

- Hallar una fórmula de recurrencia y una general para la sucesión de áreas de esos cuadrados y calcular el límite de la suma de esas áreas.
- Hallar una fórmula de recurrencia y una general para la sucesión de perímetros de esos cuadrados y calcular el límite de la suma de esos perímetros.
- Una variante de lo anterior es en cada paso “pintar” un triángulo de los que determinan dos puntos medios de lados consecutivos y el vértice que comparten (ver figura).



Hallar una fórmula de recurrencia y una general para la sucesión de áreas “pintadas” y calcular el límite de la suma de esas áreas.

6. Triángulos de Sierpinski



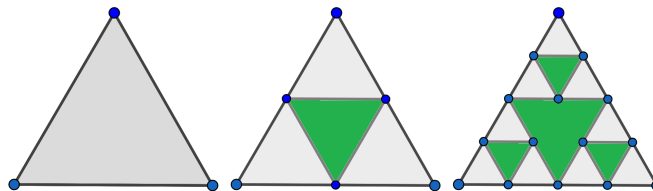
Consideramos un triángulo equilátero de lado unidad (paso 0).

Los puntos medios de sus lados determinan otro triángulo equilátero (paso 1).

Se repite el proceso en los otros tres triángulos equiláteros que se forman (paso 2).

Así sucesivamente.

- Sea p_n el perímetro de la figura en el paso n . Hallar una fórmula de recurrencia y una fórmula general para p_n y calcular $\lim p_n$.
- Una variante de lo anterior es en cada paso “pintar” el triángulo que determinan los puntos medios.



Si a_n es el área “pintada” en el paso n , hallar una fórmula de recurrencia y una fórmula general para a_n y calcular $\lim a_n$.