Geometría – Parte III

Vectores, Teorema de Thales, Homotecia, Semejanza.

1. Dividir un segmento en cinco parte iguales.

2. Las rectas *AA'*, *BB'*, *CC'*, *DD'* y *EE'* son paralelas y $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4{,}5$, $\overline{CD}=7{,}5$, $\overline{DE}=12$ y $\overline{A'B'}=2{,}4$:

a) Calcular $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ y $\overline{D'E'}$.

b) Comparar las razones $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CE}}$ y $\dfrac{\overline{C'D'}}{\overline{C'E'}}$.

3. Demostrar que las diagonales de un trapecio se dividen mutuamente en partes proporcionales a las bases.

4. *ABCD* es un trapecio de bases *AB* y *CD*.

a) Determinar el punto *M* tal que $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

b) La paralela a *AB* por *M* corta a *BC* en *N*. Calcular *k* si $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BN}$.

5. Dados dos puntos *A* y *B*, hallar los puntos *X* que cumplen:

a) $\overrightarrow{AX}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BX}$ b) $\overrightarrow{AX}=\frac{5}{3}\overrightarrow{BX}$ c) $\overrightarrow{AX}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BX}$

d) $\overrightarrow{AX}=3\overrightarrow{BX}$ e) $3\overrightarrow{AX}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{BX}$ f) $2\overrightarrow{AX}=-\sqrt{3}\,\overrightarrow{BX}$

6. Definición: Los puntos (*A*, *B*, *X*, *X'*) forman una cuaterna armónica si existe una razón *k* tal que: $\overrightarrow{AX}=-k\overrightarrow{BX}$ y $\overrightarrow{AX'}=k\overrightarrow{BX'}$.

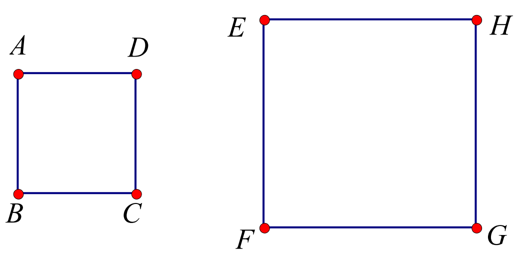
Dados *A*, *B* y *X*, determinar *X'* para que (*A*, *B*, *X*, *X'*) sea una cuaterna armónica.

7. a) Trazar un triángulo *ABC* y un punto *O* exterior a él. Construir la imagen del triángulo en: i) $H_{O,3}$ ii) $H_{O,-3}$ iii) $H_{O,-1}$ iv) $H_{A,1/2}$ v) $H_{A,-1/2}$ vi) $H_{A,-1}$.

b) Trazar una circunferencia $C(O,\delta)$. Construir la imagen de ella en:
i) $H_{A,3/2}$ siendo *A* exterior al círculo de $C(O,\delta)$. ii) $H_{A,-3/2}$ siendo *A* interior al círculo de $C(O,\delta)$. iii) $H_{A,1/2}$ siendo *A* perteneciente a $C(O,\delta)$. iv) $H_{O,-1/2}$.

c) *r* y *s* son dos rectas secantes en *A*, *O* es un punto de su plano. Construir la imagen de dichas rectas en: i) $H_{O,2/3}$ ii) $H_{O,-2/3}$ iii) $H_{A,3/4}$ iv) $H_{A,-3/4}$.

8. *ABCD* y *EFGH* son dos cuadrados de lados paralelos; encontrar dos puntos *O* y *O'* centros de dos homotecias distintas que transforman uno en el otro.

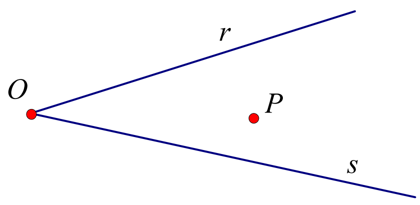


9. Construir un triángulo ABC sabiendo que:
$2d(A, B) = 3d(A, C)$, $\angle(CAB) = 45º$ y $m_A = 5$ (m_A es la mediana desde el vértice A).

10. Dado un triángulo, construir un cuadrado inscripto en él.

11. Dadas las circunferencias $C(A, 3)$ y $C(B, 5)$ con $d(A, B) = 11$. Construir sus tangentes comunes aplicando homotecia.

12. Dado un ángulo rOs y un punto P interior, construir las circunferencias que pasan por P y son tangentes a r y a s.



13. Trazar una circunferencia que sea tangente a otra circunferencia y a dos rectas dadas.

14. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, con $d(A, C) = 6$ y $d(A, B) = 8$. P es el punto de intersección del segmento BC y la bisectriz el ángulo CAB. P' es la intersección de la recta BC y la bisectriz de uno de los ángulos adyacentes al ángulo CAB.
Hallar las distancias: $d(B, D)$, $d(P, C)$ y $d(C, P')$.

15. Indicar si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes proposiciones; justificar:
i) Todos los triángulos son semejantes. ii) Todos los cuadrados son semejantes.
iii) Todos los triángulos rectángulos son semejantes. iii) Todos los triángulos equiláteros son semejantes. v) Todas las circunferencias son semejantes. vi) Todos los rombos son semejantes.

16. <u>El modelo de la torre Eiffel</u> (Y. Perelman)
La torre Eiffel de París tiene 300 metros de altura y está construida enteramente de hierro; su peso total es de unos 8.000.000 de kilos. Se desea construir un modelo exacto de dicha torre, también de hierro y que pese sólo un kilo. ¿Qué altura tendrá?

17. $ABCDE$ es un pentágono regular:
a) Demostrar que los triángulos ADB y ADC son iguales y que la semirrecta AC es bisectriz del ángulo DAB.
b) $AC \cap DB = \{ J\}$; demostrar que los triángulos AJB y DAB son semejantes y deducir la longitud de AD en función de lado del pentágono.
c) Deducir una construcción con regla y compás de un pentágono regular conociendo la longitud del lado.

18. En todo triángulo ABC rectángulo en A, se cumple que $\frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2} = \frac{1}{\overline{AH}^2}$ siendo H la proyección ortogonal de A en BC; demostrarlo.

19. Considerar un triángulo ABC, su circunferencia circunscripta $\mathcal{C}$ y la bisectriz del ángulo CAB. $\mathcal{C} \cap$ bisectriz(CAB) = $\{D, A\}$, $BC \cap$ bisectriz(CAB) = $\{E\}$.
a) Demostrar que: $d(A, B).d(A, C) = d(A, D).\ d(A, E)$.
b) Demostrar que: $d^2(D, C) = d(D, E).\ d(D, A)$ (Sugerencia: buscar en la figura dos triángulos semejantes al DEC).

20. <u>Generalización del Teorema de Pitágoras</u>
En un triángulo ABC, sean:
$d(B, C) = a$, $d(A, C) = b$, $d(A, B) = c$,
$H = \text{proy}_{AC}(B)$ y $d(A, H) = c'$.
Demostrar que:
i) Si el ángulo CAB es agudo entonces
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$$
ii) Si el ángulo CAB es obtuso entonces
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'.$$