Número Real - Ejercicios

1. I) Sabiendo que $\sqrt{2}$ es irracional, mostrar que la suma $\sqrt{2}+1$ es irracional.
   II) Mostrar que los números $\sqrt{2}+1$ y $\sqrt{2}-1$ son inversos.
   III) Probar que la suma de un racional y un irracional es irracional.
   IV) ¿Puede afirmarse lo mismo para el producto? Demostrarlo.
   V) ¿Puede afirmarse que la suma o el producto de irracionales es irracional? Demostrarlo.

2. Determinar si los siguientes conjuntos son acotados y hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo:
   a) $A = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leqslant 2x \leqslant 1\}$
   b) $B = \{x \in \mathbb{R} / x + 3 > 2x + 4\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x-2)(x-3) \leqslant 0\}$
   d) $D = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 + 5x - 2 \geqslant 0\}$
   e) $E = \{x \in \mathbb{R} / x(1-x) > -6 \wedge x \geqslant 0\}$
   f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0\right\}$
   g) $G = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{1}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{x}\right\}$
   h) $H = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{x^6 - 65x^4 + 5x^3 + 780x^2 + 9}{x^6 - 65x^4 + 784x^2} \leqslant 1\right\}$

3. Determinar si los siguientes conjuntos son acotados y hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo:
   a) $A = \left\{x_n \in \mathbb{R} / n \in \mathbb{N} \wedge x_n = \dfrac{3n+4}{4n+3}\right\}$
   b) $B = \{x_n \in \mathbb{R} / n \in \mathbb{N} \wedge x_n = 2n^3 - 9n^2 - 8n\}$
   c) $C = \left\{a_n \in \mathbb{R} / n \in \mathbb{N}^* \wedge a_n = 3 - \dfrac{2}{n}\right\} \cup \{3\}$
   d) $D = \{a_n \in \mathbb{R} / n \in \mathbb{N} \wedge a_n = \sqrt{n}\}$
   e) $F = \{a_n \in \mathbb{R} / n \in \mathbb{N}^* \wedge a_n = 2^{-n} + 3^{-n} + 5^{-n}\}$

4. Determinar si los siguientes conjuntos son acotados y hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo:
   a) $A = \{m \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - mx + 1 > 0\}$
   b) $B = \{y \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2 + 1\}$
   c) $C = \{y \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \wedge y = x(x-2)\}$
   d) $D = \{x \in \mathbb{Q} / 2^x \leqslant 7\}$

5. Sea $S \subset \mathbb{R}$ con $\sup(S) = 3$. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o es falsa; justificar:

   a) Cualquier elemento de S es menor o igual a 3.
   b) Cualquier número menor que 3 pertenece a S.
   c) El número π es cota superior de S.
   d) Existe algún elemento de S mayor que $\frac{26}{9}$.
   e) Existe algún elemento de S mayor que $2,\bar{9}$.
   f) Si T es el conjunto de los opuestos de S entonces $\text{ínf}(T) = -3$.
   g) Si además $0 \notin S$ y U es el conjunto de los inversos de S, entonces $\text{ínf}(U) = \frac{1}{3}$.

6. Dado el par de sucesiones $(\{x_n\}, \{y_n\})$ con $x_n = 3 - \dfrac{1}{n^2}$ y $y_n = 3 + \dfrac{1}{n^2}$:

   a) Calcular sus límites y estudiar su monotonía.
   b) Probar que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leqslant y_n$.
   c) Probar que $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow y_n - x_n < \varepsilon$.

7. Probar que si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y B es acotado superiormente, entonces:
$$\sup(A) \leqslant \sup(B).$$
   Deducir un resultado análogo para el ínfimo.

8. Demostrar que si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente, entonces:
$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A, \sup(A) - \varepsilon < a \leqslant \sup(A).$$
   Deducir un resultado análogo para el ínfimo.

9. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos. Probar que:
$$\forall a \in A \forall b \in B, a \leqslant b \Rightarrow \sup(A) \leqslant \text{ínf}(B).$$

10. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados superiormente, considerar
$$S = \{a + b \in \mathbb{R} / a \in A \wedge b \in B\}.$$
   Probar que $\sup(S) = \sup(A) + \sup(B)$.