Límites y Continuidad – Ejercicios IV

1. Aplicando la definición de límite demostrar que:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$ b) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)\neq 5.0001$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

2. Para cada función $f: D\to\mathbb{R}$, hallar su dominio (sin restricciones), estudiar su continuidad y calcular los límites en cada discontinuidad y en infinito; interpretar gráficamente:

1) $f(x)=\dfrac{2x^3-6x^2-4x+12}{5(2-x)(x-3)}$ 2) $f(x)=\dfrac{1-x\sqrt{x}}{1-x}$ 3) $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{x^2-16}$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 5) $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{L}(x)}+\dfrac{\mathrm{L}(x)+2}{x-1}$ 6) $f(x)=\mathrm{L}\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{1}{x}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{2.\mathrm{Arctg}(x)}$ 8) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ 9) $f(x)=-\dfrac{2}{x+\mathrm{L}(x)-2}$

10) $f(x)=\dfrac{\mathrm{sgn}(x)}{e^{-x}-x}$ 11) $f(x)=\dfrac{5(1-x)}{x^2-x-\cos(x)}$ 12) $f(x)=\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

3. Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{L}(1-3x^2)}{2x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\mathrm{L}(x+2)}{x+1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{2-x}-1}{x^3-4x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b^x-1}{x}$ 5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\mathrm{L}\left((x+a)/x\right)}{1-e^{-a/x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}(2x)}{x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\,\mathrm{tg}(3x)}{x}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\pi x)}{x^2}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{Arctg}\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$ 11) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}(5t)-\mathrm{sen}(3t)}{\mathrm{sen}(t)}$ 12) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(t)-\mathrm{sen}(t)}{\mathrm{sen}^3(t)}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{\mathrm{L}(\cos(x))}{x^2}\right)$ 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x}$ 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x.\cos(1/x)}{x-\cos(x)}$

4. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{7x^3-2x^2+9}}{(3x+11)\sqrt{x+2}}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{x+1}}{x^{90}+9x^{80}}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\mathrm{L}(x^3+1)+\mathrm{L}(x+1)}{\sqrt[3]{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^3e^{-x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}}\left(\sqrt[3]{x}.e^{\frac{1}{x}}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$

5. Estudiar y graficar ramas infinitas, direcciones asintóticas y asíntotas para las siguientes funciones $f : D \to \mathbb{R}$ con:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$ 2) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ 3) $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$

4) $f(x) = x + \mathrm{Arcos}(1/x)$ 5) $f(x) = 3x + \mathrm{L}\left|e^x - 1\right|$ 6) $f(x) = (x+4)e^{-1/x}$

7) $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x^4 - x}$ 8) $f(x) = x.\mathrm{sen}(1/x)$ 9) $f(x) = \cos(x) - x$

6. Estudiar la discontinuidad en 0 para *f* y para *g*:

$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \quad f(x) = \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \quad g(x) = x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

7. Se define la función:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{con} \quad f(0) = 1 \quad \text{y} \quad f(t) = \mathrm{sen}\left(\pi / t\right) \text{ si } t \neq 0$$

Determinar los puntos de discontinuidad de la función φ, siendo

$$\varphi(t) = t.f\left(\frac{1}{f(t)}\right)$$

8. $f : [0,1] \to [0,1]$ Si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $f(x) = x$; en otro caso $f(x) = 1 - x$.
Mostrar que *f* es continua en un punto y discontinua en todos los demás.

9. Mostrar que la función de Dirichlet es discontinua en todos los puntos.