Un posible enfoque al curso de Matemática II de 6° de Ingeniería

Geometría en el plano- espacio y Geometría Analítica

Prof: Elena Freire Gard

01/01/2016

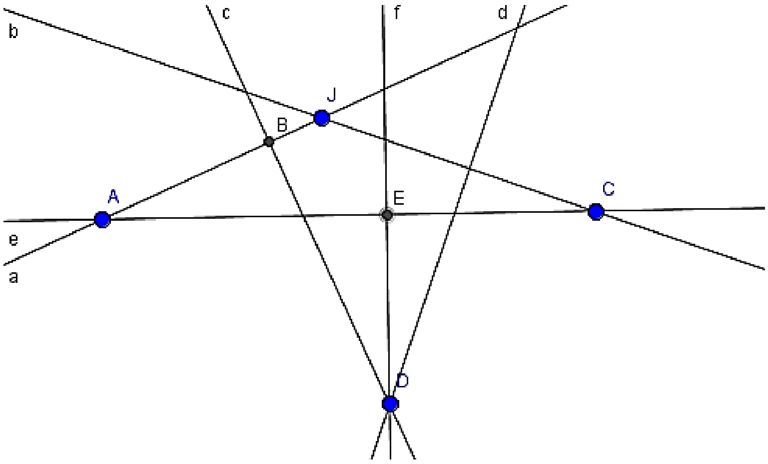
Revisión de propiedades geométricas correspondientes a cursos anteriores.

Subtemas previos

- Puntos y rectas notables de un triángulo. Paralela media
- Ángulos entre dos rectas paralelas y una secante. Condición necesaria para que dos rectas sean paralelas
- Ángulos inscriptos y ángulos al centro.
- Arco capaz. Lugar geométrico de Thales
- Propiedades de un cuadrilátero.
- Condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea un paralelogramo, un rombo, un cuadrado.
- Condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea inscriptible.
- Criterios de congruencia de triángulos
- Semejanza
- Criterios de semejanza de triángulos
- Teorema de la altura, teorema del cateto, teorema de Pitágoras

PRUEBA DIAGNÓSTICA 6° Científico-Matemático, Matemática II:

Fuente: Pág. 4 y 5 libro Geometría- Un curso de geometría métrica para el segundo ciclo – Zambra-Rodríguez Dipierro- Belcredi

1. Construye un triángulo ABC.
   a. Traza las bisectrices
   b. Traza las medianas
   c. Traza la circunferencia circunscripta al triángulo ABC
   d. Identifica circuncentro, baricentro e incentro.
2. B es un punto exterior a una recta (r), A es un punto de la recta (r) (diferente de la proyección ortogonal de B sobre (r)). Traza una circunferencia tangente a la recta (r) en A tal que B pertenezca a la circunferencia
3. Construye con regla y compás
   a. Un ángulo de 30°
   b. Un triángulo equilátero conocida su altura
   c. Un rombo conociendo las longitudes de sus diagonales
4. Demuestra que el cuadrilátero ABED es inscriptible sabiendo que B, E son proyecciones ortogonales de D sobre los lados del triángulo AJC (según figura anexa)
   a. 

Según la prueba anterior se podrá indagar si los alumnos conocen:

- Líneas y puntos notables de un triángulo
- Condición para que una recta sea tangente a una circunferencia y condición para que dos puntos pertenezcan a una circunferencia (definición de circunferencia)
- Propiedad de las diagonales de un rombo.
- Construcciones elementales con regla y compás (propiedad de la bisectriz)
- Propiedades de un triángulo equilátero
- Condición para que un cuadrilátero sea inscriptible
- El enfoque del curso correspondiente a geometría en el plano y en el espacio se realizará utilizando el programa Geogebra para facilitar la investigación y deducción de propiedades métricas. Asimismo se promoverá en los alumnos el desarrollo de habilidades que les permita integrar recursos informáticos en el aula, fomentando el trabajo en equipo y la asignación de diferentes roles dentro del mismo.

ESTRUCTURA DEL CURSO

- ✓ Geometría métrica en el plano
- ✓ Geometría métrica en el espacio: clasificación de poliedros, aplicaciones del teorema de Pitágoras, teorema de Thales, cálculo de distancias, aplicaciones del teorema de la altura o del cateto. (ver)
- ✓ Geometría analítica

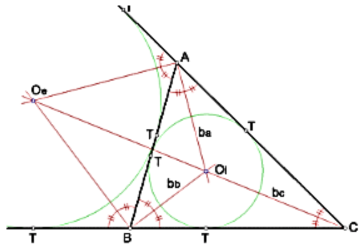
CRITERIOS A CONSIDERAR EN LA EVALUACIÓN DEL CURSO

- ✓ Asiduidad y puntualidad (a)
- ✓ Trabajo en clase, incluyendo actitud y responsabilidad frente al curso. (tc)
- ✓ Se realizarán tres presentaciones de carpeta:
  - En el mes de mayo (segunda quincena) los alumnos tendrán que presentar una carpeta con los ejercicios trabajados en clase adjuntando imágenes de las construcciones realizadas con geogebra, teniendo impreso dentro de la imagen el nombre, apellido y fecha de realización del ejercicio. En el caso que se haya realizado en equipo (menos que 4 integrantes) se informará previamente al docente. (c)
  - En el mes de agosto se realizará una segunda entrega de carpeta correspondiente a ejercicios de geometría analítica
- ✓ Las calificaciones de los dos parciales deberán sumar mínimo 16 puntos, en ninguno de ellos podrá obtenerse calificación menor que 5 para la promoción de la asignatura. (p)

Se realizarán 4 escritos además de los parciales (e)

- ✓ Se valorará el trabajo domiciliario (td) 20% califi. Aprox.
- ✓ Fórmula para calcular el promedio
- ✓ PR: $=\frac{\boldsymbol{a+4\,tc+4c+4e+6\,p+2td}}{\boldsymbol{1+4+4+4+6+2}}$ en caso de que no haya parcial o escrito se eliminan del denominador los coeficientes de los términos faltantes en el numerador. Condición para promover Parcial 1> 4, parcial 2>4. La fórmula anterior se irá estudiando durante el curso y analizando la ponderación de los términos incluídos.

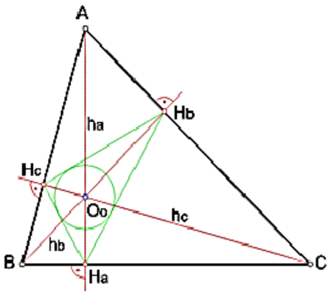
Puntos y rectas notables de un triángulo.



- ✓ **BISECTRICES, INCENTRO**

Si trazamos las **bisectrices** de los tres ángulos internos de un triángulo, estas se cortarán en un mismo punto, que se denomina **Incentro (Oi)**, y que resulta ser el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

- ✓ **ALTURAS, ORTOCENTRO**

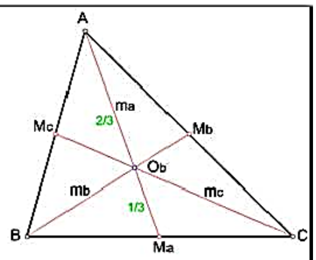


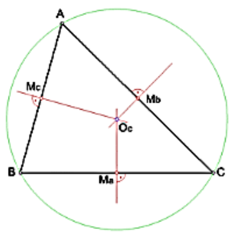
Las **Alturas** de un triángulo, son los segmentos perpendiculares trazados respectivamente desde cada vértice, a la recta que contiene a cada lado opuesto. Las tres **alturas** de un triángulo se cortan en un mismo punto, que se denomina **Ortocentro (Oo)**. El triángulo resultante de unir las tres bases de las alturas (Ha,Hb,Hc), se denomina triángulo órtico, y el Ortocentro(Oo) resulta ser el incentro de dicho triángulo órtico.

- **MEDIANAS Y BARICENTRO**

Las **medianas** de un triángulo, son los segmentos determinados por cada vértice y el punto medio del lado opuesto.

Las tres medianas de un triángulo se intersecan en un mismo punto, que se denomina **Baricentro(Ob)**. El segmento determinado por cada vértice y el baricentro mide 2/3 de la respectiva mediana.





- **MEDIATRICES Y CIRCUNCENTRO**

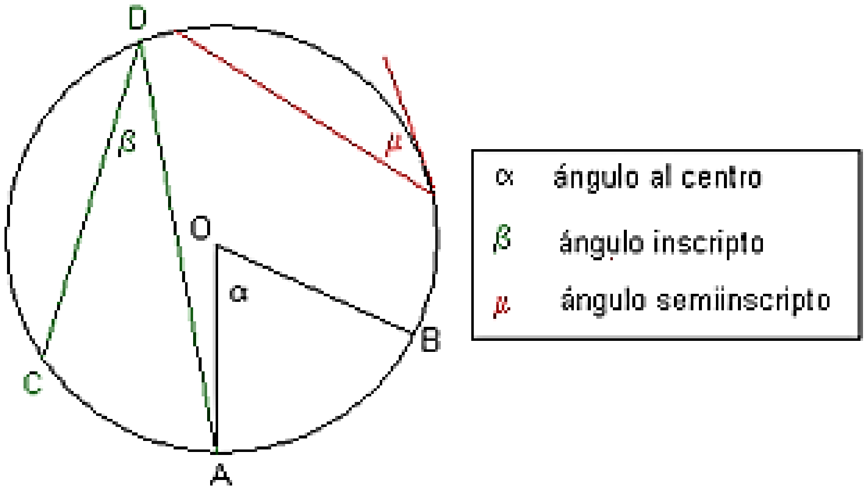
Si trazamos las **mediatrices** de los tres lados de un triángulo, estas se cortarán en un mismo punto, que se demomina **Circuncentro(Oc)**, y que resulta ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Paralela media

Ángulos entre dos rectas paralelas y una secante. Condición necesaria para que dos rectas sean paralelas

Ángulos inscriptos y ángulos al centro

Ángulos en la circunferencia



Ángulo al centro: en una circunferencia un ángulo al centro de arco AB es aquel que su vértice es el centro de la Cfa. Y sus lados son: OB y OA

Ángulo inscripto: es aquel el cual el vértice pertenece a la cfa. y cuyos lados la cortan en puntos distintos del vértice.

Ángulo seminscripto: es aquel que tiene el vértice en la Cfa., un lado secante y el otro tangente.

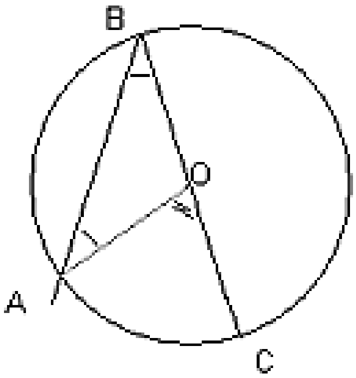
Ángulo interior es aquel cuyo vértice pertenece al círculo.

Ángulo exterior es aquel cuyo vértice no pertenece a la circunfenrencia ni al círculo y sus lados son secantes.

I. Relación INSCRIPTO con CENTRAL:

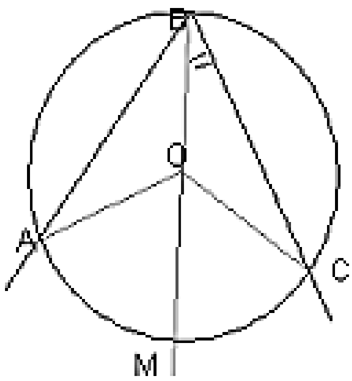
Todo ángulo inscripto es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco:

ABC = ½ de AOC



Primer caso:

El centro O está en un lado del ángulo. El ángulo central AOC es exterior del triángulo AOB; ⇒
ángulo AOC = AOB + ABO
Pero el ángulo OAB = al ABO por ser ángulos en la base del triángulo AOB isósceles;
AOC = 2 ABC :   ABC = ½ AOC



Segundo caso:

El centro O es interior a ABC uniendo B con C, queda el ángulo ABC, descompuesto en la suma de: ABM + MBC, ambos en la condición del caso anterior.

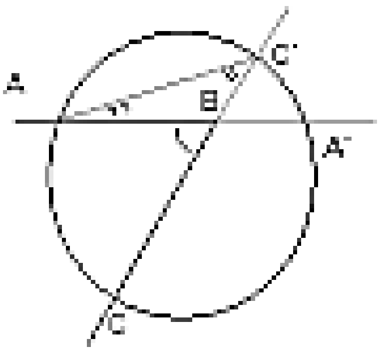
El ángulo ABM = ½ AOM;
MBC = ½ MOC. ⇒
ABC = ½ (AOM + MOC) = ½ AOC

INTERIOR - EXTERIOR

Sea el ABC si prolongamos BC hasta encontrar la Cfa. En C´ y unimos este punto con A en el triangulo ABC´ el ángulo dado es exterior:

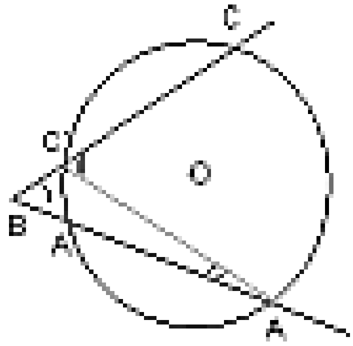
ABC = AC´B + BAC´ y como estos son ángulos inscriptos que abarcan los mismos arcos que el ángulo dado y las prolongaciones de su lado resulta:

Un ángulo de vértice interior a la Cfa. Es la suma de los ángulos inscriptos que abarcan los mismos arcos que él y su opuesto por el vértice.



Sea el triangulo ABC . Unimos A con C´ : en el triangulo ABC´el ángulo dado es interno, y puesto que el ángulo ABC + BAC´ = al ángulo AC´C tenemos:

Ángulo ABC = AC´C – BAC´ ⇒



Un ángulo de vértice exterior a una Cfa, es igual a la diferencia entre los ángulos inscriptos correspondientes a los dos arcos que abarcan sus lados: por tanto, es menos que el ángulo inscripto AC´C.

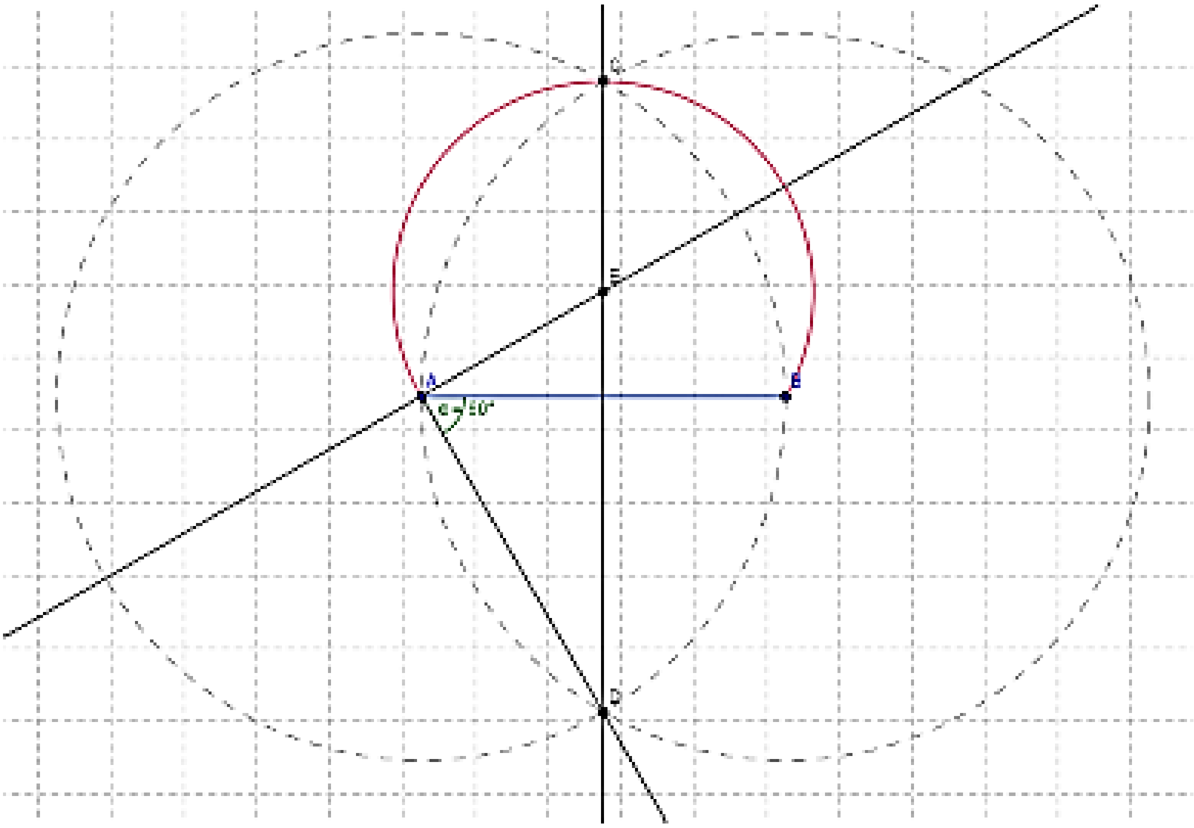
Un ángulo de vértice exterior a una Cfa. , tiene por medida la semidiferencia de los arcos que abarcan sus lados.

Arco capaz. Lugar geométrico de Thales

PASOS PARA SU CONSTRUCCIÓN

EXPLICACIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN ARCO CAPAZ TRAZADO SOBRE UN SEGMENTO AB DE 5 CM Y ÁNGULO 60º

Hallar todos los puntos del plano desde los cuales se ve los extremos del segmento AB bajo un ángulo de 60º



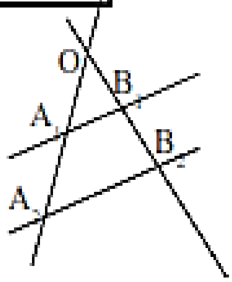
Procedimiento:

1) Trazar el segmento AB
2) En el semiplano de borde AB dibujar el ángulo de 60º, si dibujo el ángulo de 60º como la figura, el arco capaz quedará dibujado en el semiplano opuesto.
3) Para construir como en este caso un ángulo de 60º con compás construyo un triángulo equilátero (todos sus ángulos miden 60º), Circunferencia de centro A y radio 5, circunferencia de centro B y radio 5 por lo que AD=DB=AB
4) AE es perpendicular a AO por A
5) AE corta a la mediatriz de AB en E, E es el centro de la circunferencia que contiene el arco capaz
6) Con centro en E y radio AE=EB dibujo el arco ACB (el arco rojo es el arco capaz, el arco simétrico respecto de AB también (no está dibujado) para no marearte comienza con este trazado

Teorema de Thales y consecuencias

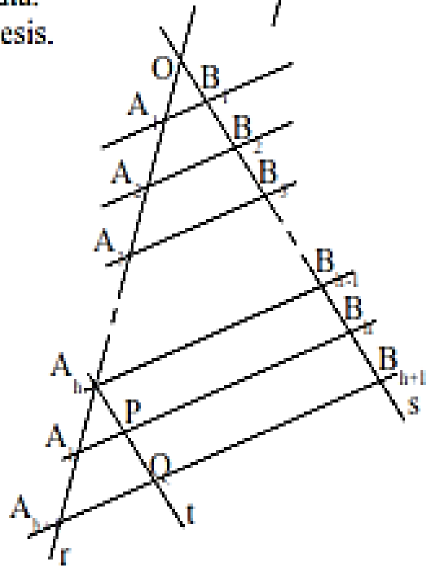
Lema previo

H) $r \cap s = \{O\}$ $A_1, A_2, \dots, A_n \in r$ $B_1, B_2, \dots, B_n \in s$ $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel \dots \parallel A_nB_n$ $\overline{OA_1} =_g \overline{A_1A_2} =_g \dots =_g \overline{A_{n-1}A_n}$	**T)** $\overline{OB_1} =_g \overline{B_1B_2} =_g \dots =_g \overline{B_{n-1}B_n}$



Haremos una demostración por inducción completa.
<u>Paso base:</u> la propiedad se cumple para $n=2$

Como $\overline{OA_1} =_g \overline{OA_2}$, A_1 es punto medio de $\overline{OA_2}$.
Entonces en el triángulo $\widehat{OA_2B_2}$, la recta A_1B_1 es paralela media.
Por lo tanto B_1 es punto medio de $\overline{OB_2}$, así que se cumple la tesis.



<u>Paso inductivo:</u> H_{ind}) la propiedad se cumple para $n=h$
T_{ind}) la propiedad se cumple para $n=h+1$

Como la propiedad se cumple para $n=h$, entonces
$\overline{OB_1} =_g \overline{B_1B_2} =_g \dots =_g \overline{B_{h-1}B_h}$. Falta demostrar que $\overline{B_hB_{h+1}}$ también es igual a los demás.
Consideremos la recta t, paralela a s por el punto A_{h-1}.
Sean P y Q los puntos de corte de t con A_hB_h y $A_{h+1}B_{h+1}$ respectivamente.
$B_hB_{h-1}A_{h-1}P$ es paralelogramo $\Rightarrow \overline{B_{h-1}B_h} =_g \overline{A_{h-1}P}$

En el triángulo $\widehat{A_{h-1}A_{h+1}Q}$ la recta A_hP es paralela media, por lo tanto $\overline{A_{h-1}P} =_g \overline{PQ}$

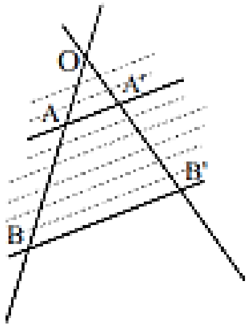
Finalmente $B_{h+1}B_hPQ$ es paralelogramo $\Rightarrow \overline{PQ} =_g \overline{B_{h+1}B_h}$

Por la propiedad transitiva, podemos afirmar que $\overline{B_{h+1}B_h} =_g \overline{B_hB_{h-1}}$, lo cual completa la tesis.

Teorema de Thales

H) O, A y B alineados O, A' y B' alineados AA' ∥ BB'	**T)** $\dfrac{d(O,A)}{d(O,B)}=\dfrac{d(O,A')}{d(O,B')}$

(Lo demostraremos para segmentos conmensurables[1])



Si $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son conmensurables, existe un segmento u que "entra" una cantidad entera de veces en $\overline{OA}$ y en $\overline{OB}$. Si por los extremos de esos segmentos trazamos paralelas a AA', estaremos en las hipótesis del Lema anterior; así que sobre la recta OA' estas paralelas determinarán segmentos iguales entre sí.

Por lo tanto, $\dfrac{d(O,A)}{d(O,B)}=\dfrac{d(O,A')}{d(O,B')}$

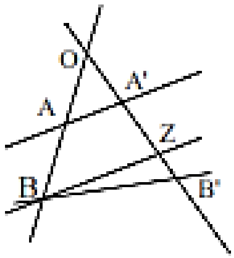
Ejercicio

Demuestre el siguiente **corolario**: si O, A, B, C, D alineados y O, A', B', C', D' alineados y además AA' ∥ BB' ∥ CC' ∥ DD', entonces $\dfrac{d(A,B)}{d(C,D)}=\dfrac{d(A',B')}{d(C',D')}$

Recíproco

H) O, A y B alineados O, A' y B' alineados $\dfrac{d(O,A)}{d(O,B)}=\dfrac{d(O,A')}{d(O,B')}$	**T)** AA' ∥ BB'

Haremos una demostración por el absurdo.



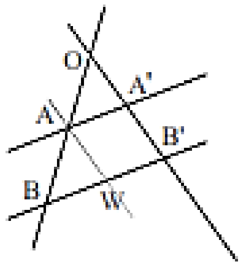
Supongamos que AA' y BB' no son paralelas. Entonces la paralela a AA' por B corta a A'B' en un punto Z≠B'.

Por el teorema de Thales, tenemos que $\dfrac{d(O,A)}{d(O,B)}=\dfrac{d(O,A')}{d(O,Z)}$

pero por hipótesis $\dfrac{d(O,A)}{d(O,B)}=\dfrac{d(O,A')}{d(O,B')}$. Entonces $d(O,B') = d(O,Z)$ y por lo tanto B'=Z (lo cual contradice la suposición anterior).

Otro corolario de Thales

H) O, A y B alineados O, A' y B' alineados AA' ∥ BB'	**T)** $\frac{d(O,A)}{d(O,B)} = \frac{d(A,A')}{d(B,B')}$



Sea $W \in BB'$ tal que $AW \parallel OB'$.

Por Thales (en las paralelas OB' y AW) tenemos que $\frac{d(O,A)}{d(O,B)} = \frac{d(B',W)}{d(B,B')}$

Pero como AA'B'W es un paralelogramo, $\overline{AA'} =_g \overline{B'W}$.

Por lo tanto, $\frac{d(O,A)}{d(O,B)} = \frac{d(A,A')}{d(B,B')}$.

Propiedades de un cuadrilátero.

Condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea un paralelogramo, un rombo, un cuadrado.

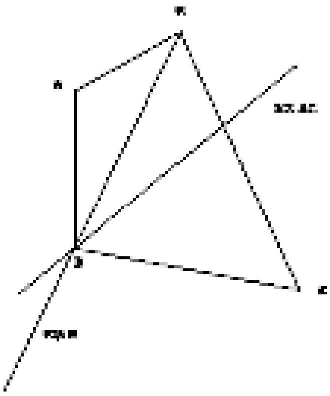
Condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea

Cíclicos

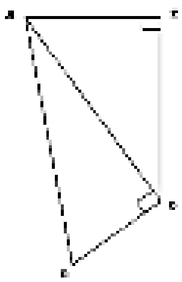
CUADRILÁTEROS:

- **condiciones suficientes:**

1. Si mz AC ∩ bis b = D
   → A,B,C,D son cíclicos



2. Si ABD = 90º y ADC = 90º es suficiente para demostrar que ABCD es cíclico pero no es necesaria porque hay cuadriláteros que son cíclicos pero no cumplen esta propiedad.



Por L.G. de Thales AD es diámetro (Φ) de una cfa. Que pasa por B y por C.

Criterios de congruencia de triángulos

Criterios de igualdad geométrica de triángulos

H) $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ triángulos $\overline{AB} =_g \overline{A'B'}$ $\overline{AC} =_g \overline{A'C'}$ $\overline{BC} =_g \overline{B'C'}$	**T)** $\widehat{ABC} =_g \widehat{A'B'C'}$

H) $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ triángulos $\overline{AB} =_g \overline{A'B'}$ $\overline{AC} =_g \overline{A'C'}$ $\widehat{BAC} =_g \widehat{B'A'C'}$	**T)** $\widehat{ABC} =_g \widehat{A'B'C'}$

H) $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ triángulos $\overline{AB} =_g \overline{A'B'}$ $\widehat{BAC} =_g \widehat{B'A'C'}$ $\widehat{ABC} =_g \widehat{A'B'C'}$	**T)** $\widehat{ABC} =_g \widehat{A'B'C'}$

Objetivo: el alumno deberá investigar en grupo cuales son los criterios de congruencia y plantear un ejercicio como aplicación por cada caso presentado (trabajo grupal- 3 integrantes)

EJERCICIOS LIBRO CONGRUENCIAS Y HOMOTECIAS HECTOR PATRITTI- ANA COLO
UTU

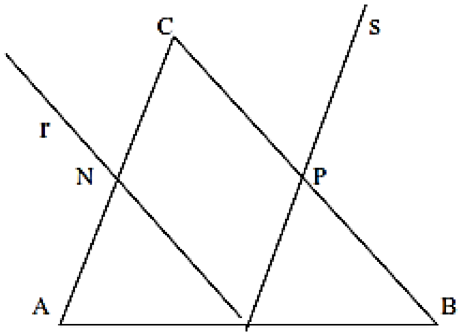
Ejercicio No.16

Dado un triángulo ABC sea M el punto medio del lado AB. Traza por el punto M las paralelas **r y s** a las rectas BC y AC respectivamente. Sean: $N = r \cap AC$, $P = s \cap BC$.

a) Demuestra que son congruentes los triángulos AMN , MBP , PNM y NPC. (se te sugiere aplicar criterios de igualdad de triángulos).

b) ¿Qué relación puedes deducir entre los segmentos MN y BC ; MP y AC ; y NP y AB?

Ejercicio No.16



a) Como: $\begin{cases} s \parallel AC \text{ , se cumple que: } \text{ang.NAM} = \text{ang.PMB} \text{ (correspondientes)} \\ r \parallel BC \text{ , se cumple que: } \text{ang.NMA} = \text{ang.PBM} \text{ (correspondientes)} \\ \text{seg.AM} = \text{seg.MB} \end{cases}$

se concluye por 2do.Criterio de igualdad de triángulos que :

triang.AMN = triang.MBP (*)

Por lados paralelos por construcción el cuadrilátero MPCN es paralelogramo lo que nos permite afirmar que:

triang.NMP = triang.PCN (**)

De la igualdad (*) se deduce que seg.MN = seg.BP. Siendo además $r \parallel BC$ podemos afirmar que el cuadrilátero MNPB es oaaralelogramo y por tanto:

triang.NMP = triang.MBP (***)

Las igualdades marcadas con asteriscos demuestran lo pedido.

b) De la igualdad de segmentos MN = BP = PC se concluye que:

$MN = \frac{1}{2} BC \qquad MP = \frac{1}{2} AC \qquad NP = \frac{1}{2} AB$

$MN \parallel BC \qquad MP \parallel AN \qquad NP \parallel AB.$

Ejercicio No.17

Sea MNPQ un cuadrado de lado a y centro O. Se toman los puntos A , B y C tales que: A$\in$ seg MN , B$\in$ seg NP , C $\in$ seg PQ y son congruentes los segmentos MA , NB y PC.

a) Probar que el triángulo ABC es rectángulo e isósceles (usar congruencia de triángulos).

b) Probar que los puntos A , C y O están alineados. Deducir que: OB$\perp$AC.

Ejercicio No.17

a) En el cuadrado MNPQ se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} PB = PN - BN \\ AN = MN - MA \end{array}\right\} \Longrightarrow PB = AN$$

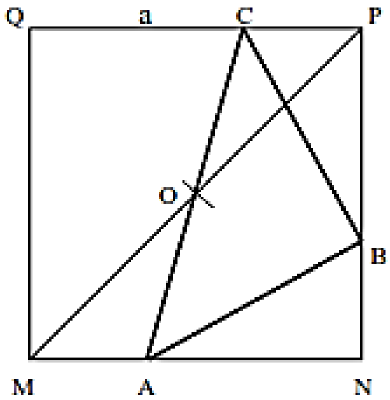
Como:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ang.}CPB = \text{ang.}ANB = 90° \\ COP = BN \text{ por construcción} \\ PB = AN \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{triang.}CPB = \text{triang.}ANB \\ \text{(2do. Criterio)} \end{array}$$

De la igualdad se concluye que: AB = BC ang.CBP = ang. BAN

Como los ángulos BAN y ABN son complementarios (triángulo ANB) concluimos que ang. CBP + ang. ABN = 90° $\Longrightarrow$ ang.CBA = 90°.

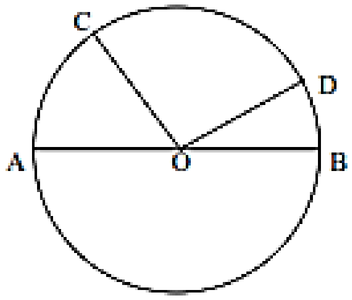
EL triángulo ABC es entonces rectángulo isósceles.



Ejercicio No.19

Sea ($\mathcal{C}$) una circunferencia de diámetro AB y centro O. En el arco superior AB se consideran los puntos C y D tales que el ángulo COD= 90º.

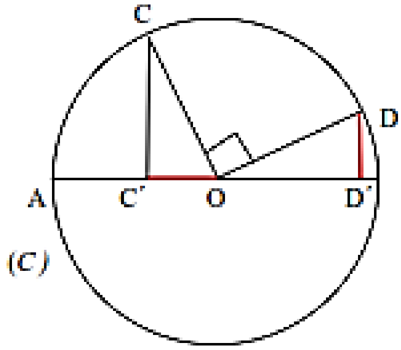
Sean C´ y D´ las proyecciones ortogonales de C y D sobre AB , respectivamente.



a) Demuestra que son congruentes los triángulos OCC´ y ODD´.

b) Si ($\mathcal{C}$) es la circunferencia trigonométrica (radio unidad) la igualdad que demostraste en la parte anterior te permite relacionar las líneas trigonométricas seno y coseno de ángulos que difieren en 90º. ¿Recuerdas esas relaciones?. Vuélvelas a deducir.

Ejercicio No.19



a) Los segmentos OC y OD son congruentes por ser radios de la circunferencia.

$$\left.\begin{array}{l} \text{ang. } C'OC + \text{ang. } D'OD = 90^\circ \\ \\ \text{ang. } D'DO + \text{ang. } DOD' = 90^\circ \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ang. } COC' = \text{ang. } D'DO$$

ang. CC´O = ang. DD´O = 90°

Los triángulos CC´O y DD´O son pues rectángulos con ángulos iguales e igual hipotenusa , por lo que resultan iguales.

b) Si (C) es la circunferencia trigonométrica (Radio unidad) y llamamos

ang.DOD´= θ ang. DOC = $90^\circ + \theta$ recuerda que:

Medida del segmento DD´= senθ Medida del segmento OD´= cosθ

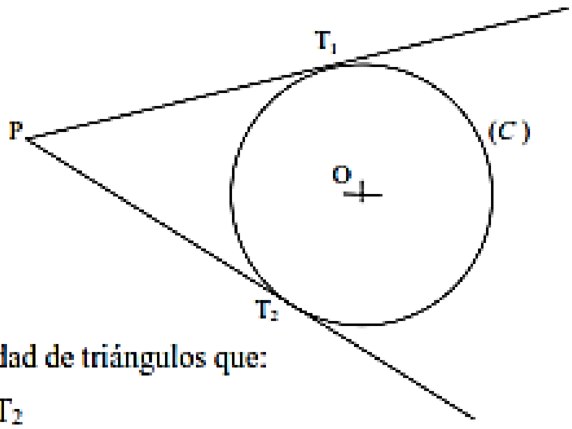
Medida del segmento CC´= sen $(90^\circ + \theta)$ Medida del segmento OC´= - cos$(90^\circ+\theta)$

Teniendo en cuenta la parte **a)** del ejercicio podemos entonces escribir que:

sen θ = - cos $(90^\circ + \theta)$ cos θ = sen $(90^\circ + \theta)$.

Ejercicio No.20

Se trazan las tangentes a la circunferencia (C) desde un punto P según figura.



Probar usando igualdad de triángulos que:

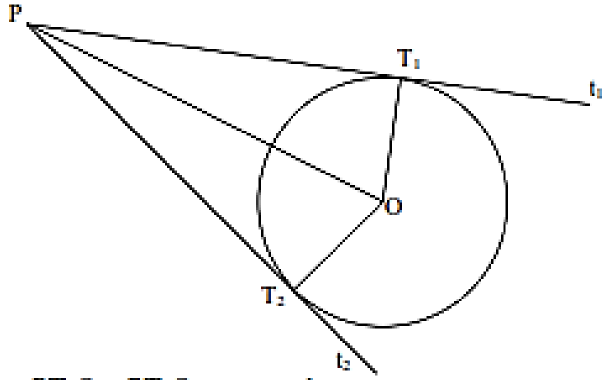
a) Seg. PT_1 = seg. PT_2

b) Semirecta P(O) es bisectriz del ángulo T_1PT_2.

c) Semirecta O(P) es bisectriz del ángulo T_1OT_2 .

d) Recta OP es mediatriz del segmento T_1T_2 .

Ejercicio No.20



a) En los triángulos PT_1O y PT_2O se cumple:

$$\begin{cases} \text{seg.}OT_1 = \text{seg. }OT_2 \quad \text{(radios)} \\ \text{seg. }OP \text{ común} \\ \text{ang.}OT_1P = \text{ang. }OT_2P = 90^\circ \end{cases}$$

En consecuencia ambos triángulos son congruentes en virtud del primer criterio de congruencia.

Se deduce entonces que seg. PT_1 = seg. PT_2

b) De la misma igualdad de triángulos se concluye también que:

ang.OPT_1 = ang. OPT_2 $\Longrightarrow$ semirecta P(O) es bisectriz del ang.T_1PT_2 .

c) Idem: ang. POT_1 = ang. POT_2 $\Longrightarrow$ semirecta O(P) es bisectriz del ang T_1OT_2 .

d) $P \in$ mediatriz del segmento T_1T_2 pues $PT_1 = PT_2$

$O \in$ mediatriz del segmento T_1T_2 pues $OT_1 = OT_2$

$\Longrightarrow$ PO es mediatriz del segmento T_1T_2.

- ✓ Ángulos entre dos rectas paralelas y una secante. Condición necesaria para que dos rectas sean paralelas
- ✓ Ángulos inscriptos y ángulos al centro.
- ✓ Arco capaz. Lugar geométrico de Thales
- ✓ Propiedades de un cuadrilátero.
- ✓ Condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea un paralelogramo, un rombo, un cuadrado.
- ✓ Condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea inscriptible.

Semejanzas

- <u>Definición de semejanza</u>.

  " Es toda función del plano en sí mismo que cumple:

1. Es biyectiva.
2. Conserva la alineación y el orden.
3. $\forall\ \overline{AB}$ incluido en el plano , si $\Sigma(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ entonces

$\dfrac{A'B'}{AB} = K \quad K \in R^{+}$ Al número real K se le denomina " **razón de semejanza**"

PROPIEDADES

- La semejanza conserva los ángulos.
- Las congruencias son un caso particular de semejanza $(K = 1)$.
- La homotecia de razón k es una semejanza de razón $|k|$. ($\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$).
- La composición de semejanzas es otra semejanza.
- Dos figuras que se correspondan en una semejanza se dicen figuras semejantes.

  Si $\Sigma(F) = G$ notaremos $F \propto G$.

<u>Criterios de semejanza de triángulos</u>.

1. Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido igual.
2. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.
3. Dos triángulos son semejantes si tienen los tres pares de lados respectivamente proporcionales.

<u>Definición</u>. A todo punto unido en la semejanza se le llama "centro de semejanza".

- Toda semejanza puede expresarse como composición de una Homotecia y una Congruencia o viceversa.
- Llamamos semejanza DIRECTA a la que conserva el sentido del plano e INVERSA a la que lo invierte.
- La composición de una Congruencia Directa y una Homotecia es una semejanza DIRECTA.

Ana Coló Herrera Héctor Patritti

- ✓ Criterios de semejanza de triángulos

Teorema de la altura y del cateto

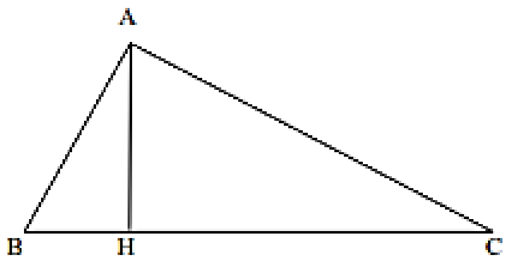
Ejercicio No.12

Sea ABC un triángulo rectángulo en A , H es el pié de la altura correspondiente al vértice A.

Utilizando semejanza de triángulos demuestra que:

$AH^2 = BH \cdot HC$ **(Teorema de la altura)**

Ejercicio No.12



Considera los triángulos AHB y AHC. Se cumple que:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{ang. } AHB = \text{ang.} AHC = 90^o & \\ \text{ang. } ABH = \text{ang.} HAC & (\text{ por complementarios del ang.} BAH\ ) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

los triángulos AHB y AHC son semejantes.

En consecuencia sus lados serán proporcionales y podemos escribir:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$$

De la última igualdad concluyes:

$$AH^2 = BH \cdot HC$$

Ejercicio No.13

En el mismo triángulo del ejercicio anterior demuestra que:

a) $AB^2 = BH \cdot B$

b) $AC^2 = CH \cdot BC$ **(Teorema del cateto)**

Considera ahora los triángulos AHB y BAC de la figura del ejercicio anterior.

Se cumple que: $\left\{\begin{array}{l} \text{ang.} AHB = \text{ang.} BAC = 90^o \\ \text{ang.} ABH \quad \text{común} \end{array}\right.$

En consecuencia los triángulos AHB y BAC serán semejantes y podremos escribir:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}=\frac{AH}{AC}$$

De la primera igualdad concluyes que:

$$AB^2 = BH\,.\,BC$$

Los triángulos AHC y BAC también serán semejantes pues:

$$\begin{cases} \text{ang.}AHC = BAC = 90º \\ \text{ang.}ACH \text{ común} \end{cases}$$

En consecuencia: $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{HC}{AC}=\dfrac{AH}{AB}$

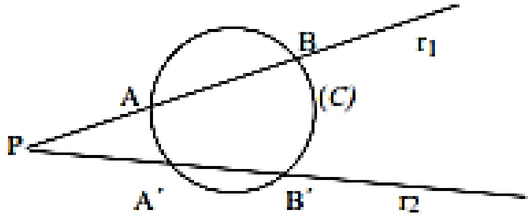
De la primera igualdad concluyes que:

$$AC^2 = CH\,.\,BC$$

Ejercicio No.14

Considera una circunferencia (C) de centro O y radio R.

P es un punto exterior a (C) y r_1 y r_2 dos rectas que contienen al punto P y son secentes a la circunferencia según indica la figura.

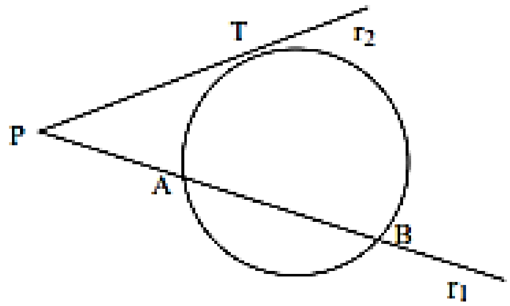


a) Demuestra que los triángulos PA´B y PAB´ son semejantes y concluye que:

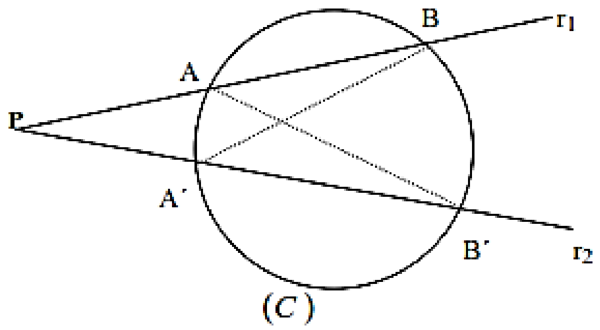
$$PA \,.\, PB = PA' \,.\, PB'$$

b) Si la recta r_2 se transforma en una de las tangentes a la circunferencia trazada por P , demuestra que los triángulos PAT y PBT son semejantes , y concluye que:

$$PA \,.\, PB = PT^2$$



a)



Los triángulos PA´B y PAB´ son semejantes pues:

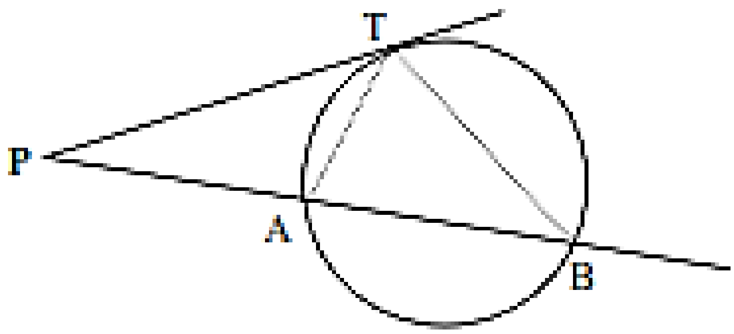
$$\begin{cases} \text{ang. APA´ común} \\ \text{ang. PBA´= ang. PB´A} \quad \text{por inscritos en } (C) \text{ que abarcan el mismo arco AA´.} \end{cases}$$

En consecuencia: $\dfrac{PA}{PA'} = \dfrac{PB}{PB'} = \dfrac{AB'}{A'B}$

De la primera igualdad concluyes que:

$$PA \,.\, PB = PA' \,.\, PB'$$

b)



Los triángulos PAT y PTB son semejantes pues:

$$\begin{cases} \text{ang. TPA común} \\ \text{ang. PTA = ang. PBT} \quad \text{por seminscrito e inscrito en } (\mathcal{C}) \text{ abarcando el mismo arco AT.} \end{cases}$$

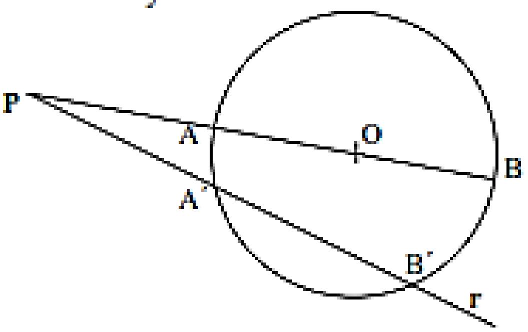
En consecuencia:

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} = \frac{AT}{BT} \Longrightarrow PA \,.\, PB = PT^2$$

c)

Circunferencia $(\mathcal{C})$ de centro O y radio R.

PO = d



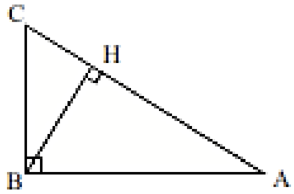
$$\left.\begin{array}{l} PA = d - R \\ PB = d + R \end{array}\right\} \Longrightarrow PA \,.\, PB = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2$$

Al producto PA.PB que como puedes concluir del resultado anterior, es independiente de la posición de la recta **r**, se le denomina: " **POTENCIA DEL PUNTO P RESPECTO DE LA CIRCUNFERENCIA $(\mathcal{C})$** ".

Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras[3]

H) $\widehat{ABC}$ recto	**T)** $d(A,B)^2+d(C,B)^2 = d(A,C)^2$



Sea H = Proy$_{AC}$(B).
Aplicando el teorema del cateto a cada uno de los catetos
obtenemos $d(A,B)^2 = d(A,H)\cdot d(A,C)$
y $d(C,B)^2 = d(C,H)\cdot d(A,C)$
Sumando: $d(A,B)^2+d(C,B)^2 = [d(A,H)+d(C,H)]\cdot d(A,C)$
y como $d(A,H)+d(C,H) = d(A,C)$, podemos afirmar que $d(A,B)^2+d(C,B)^2 = d(A,C)^2$.

[3] El teorema de Pitágoras probablemente sea el teorema del cual se conocen más demostraciones diferentes. Busque otras demostraciones del teorema de Pitágoras.

Potencia

Potencia de un punto respecto de un segmento

Definición: Llamaremos potencia de un punto respecto de un segmento $\overline{AB}$ a la función $\text{Pot}_{\overline{AB}}: AB \rightarrow \mathbb{R}$ (dominio la recta AB y los números reales) tal que:

si $P \notin \overline{AB} \Rightarrow \text{Pot}_{\overline{AB}}(P) = d(P,A) \cdot d(P,B)$

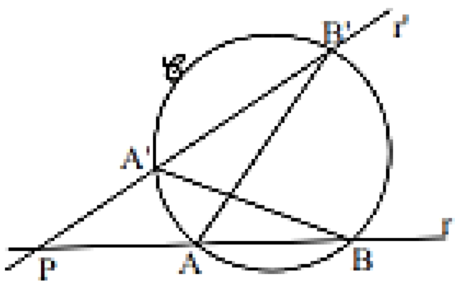
si $P \in \overline{AB} \Rightarrow \text{Pot}_{\overline{AB}}(P) = -d(P,A) \cdot d(P,B)$

Ejemplo: Sea $\overline{AB}$ un segmento tal que $d(A,B) = a$. La potencia del punto medio de $\overline{AB}$ es: $\text{Pot}_{\overline{AB}}(M) = -d(M,A) \cdot d(M,B) = -\frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} a = -\frac{1}{4} a^2$

Teorema

Dada una circunferencia $\mathcal{C}$, un punto P y una recta r que pasa por P y corta a $\mathcal{C}$ en A y B, la potencia de P con respecto a la cuerda $\overline{AB}$ no depende de la recta r elegida.

H)	T)
$\mathcal{C}$ circunferencia P punto r y r' rectas que pasan por P $r \cap \mathcal{C} = \{A, B\}$ $r' \cap \mathcal{C} = \{A', B'\}$	$\text{Pot}_{\overline{AB}}(P) = \text{Pot}_{\overline{A'B'}}(P)$



Los triángulos $\widehat{PAB'}$ y $\widehat{PA'B}$ son semejantes porque tienen dos ángulos iguales (el ángulo en P es el mismo y los ángulos en B y B' son iguales porque están inscriptos en $\mathcal{C}$ y abarcan el mismo arco $\widehat{AA'}$).

Como $\widehat{PAB'} \sim \widehat{PA'B}$ podemos afirmar que $\dfrac{d(P,A)}{d(P,A')} = \dfrac{d(P,B')}{d(P,B)}$.

Entonces $d(P,A) \cdot d(P,B) = d(P,A') \cdot d(P,B)'$. O sea que $\text{Pot}_{\overline{AB}}(P) = \text{Pot}_{\overline{A'B'}}(P)$

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Definición: Llamaremos potencia de un punto respecto de una circunferencia $\mathcal{C}$ a la función $\text{Pot}_{\mathcal{C}}: \pi \rightarrow \mathbb{R}$ (dominio el plano y codominio los números reales) tal que:

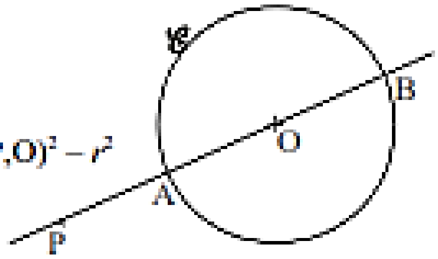
$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = \text{Pot}_{\overline{AB}}(P)$, siendo $\overline{AB}$ una cuerda cualquiera de $\mathcal{C}$ que esté alineada con P.

Proposición

(2ª expresión de la potencia)

H) $\mathcal{C}$ circunferencia de centro O y radio r P punto	T) $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = d(P,O)^2 - r^2$

Sean A y B tales que $PO \cap \mathcal{C} = \{A,B\}$



$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = d(P,A) \cdot d(P,B) = (d(P,O) - r) \cdot (d(P,O) + r) = d(P,O)^2 - r^2$

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de centro O y radio 4; sea J un punto tal que $d(O,J) = 2$ y $K = H_{J,-3}(O)$. Calcule $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(O)$, $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(J)$ y $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(K)$.
2. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia, P un punto exterior y T un punto de $\mathcal{C}$ tal que PT es tangente a $\mathcal{C}$. Demuestre que $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = (P,T)^2$ (3ª expresión de la potencia).
3. Sean A, B y C tres puntos alineados en ese orden. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia variable que pasa por B y C, y sea T el punto de contacto de una de las tangentes a $\mathcal{C}$ por A. Demuestre que $d(A,T)$ es constante y halle el lugar geométrico del punto T.

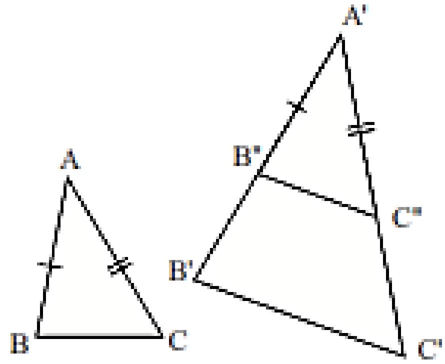
Ejercicio

Pruebe que la semejanza es una relación de equivalencia en el conjunto de las figuras.

Criterios de semejanza de triángulos

H) $\widehat{ABC} =_g \widehat{A'B'C'}$ $\widehat{BAC} =_g \widehat{B'A'C'}$	**T)** $\widehat{ABC} \sim \widehat{A'B'C'}$

Sea $B'' \in \overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $\overline{A'B''} =_g \overline{AB}$, y sea $C'' \in \overleftrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{A'C''} =_g \overline{AC}$. Como $\widehat{BAC} =_g \widehat{B''A'C''}$, entonces (por el criterio LAL de igualdad de triángulos) $\widehat{ABC} =_g \widehat{A'B''C''}$.
Es decir, existe una isometría m tal que $m(\widehat{ABC}) = \widehat{A'B''C''}$.
Por otro lado, como $\widehat{ABC} =_g \widehat{A'B'C'}$, resulta que $\widehat{AB''C''} =_g \widehat{A'B'C'}$, de donde B''C'' es paralela a B'C'. Por lo tanto (por el teorema de Thales) se cumple que
$\dfrac{d(A',B')}{d(A',B'')} = \dfrac{d(A',C')}{d(A',C'')}$, lo que nos permite afirmar que existe una homotecia h tal que $h(\widehat{A'B''C''}) = \widehat{A'B'C'}$.



Finalmente, si consideramos la semejanza $\Sigma = h \circ m$ tenemos que $\Sigma(\widehat{ABC}) = \widehat{A'B'C'}$, de donde $\widehat{ABC} \sim \widehat{A'B'C'}$.

Ejercicio

Demuestre los siguientes criterios de semejanza de triángulos:

<u>Teorema:</u>
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{BAC} =_g \widehat{B'A'C'} \\ \dfrac{d(A',B')}{d(A,B)} = \dfrac{d(A',C')}{d(A,C)} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \sim \widehat{A'B'C'}$$

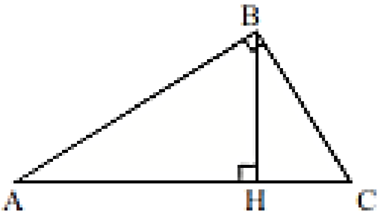
<u>Teorema:</u>
$$\left.\dfrac{d(A',B')}{d(A,B)} = \dfrac{d(A',C')}{d(A,C)} = \dfrac{d(B',C')}{d(B,C)}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \sim \widehat{A'B'C'}$$

Teorema del cateto

En todo triángulo rectángulo, la medida de un cateto es media geométrica entre la medida de la hipotenusa y la medida de la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa.

H) $\widehat{ABC}$ recto $H = Proy_{AC}(B)$	**T)** $d(A,B)^2 = d(A,H) \cdot d(A,C)$

Los triángulos $\widehat{AHB}$ y $\widehat{ABC}$ comparten el ángulo en A, y tienen respectivamente los ángulos en H y en B iguales geométricamente por ser rectos. Por el 1[er] criterio de semejanza, son semejantes, y por lo tanto se cumple que $\frac{d(A,B)}{d(A,H)} = \frac{d(A,C)}{d(A,B)}$, de donde se llega a la tesis.



Teorema de la altura

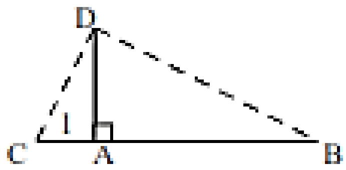
En todo triángulo rectángulo, la medida de la altura que pasa por el vértice del ángulo recto es media geométrica entre las medidas de los segmentos que determina la proyección de ese vértice sobre la hipotenusa.

H) $\widehat{ABC}$ recto $H = Proy_{AC}(B)$	**T)** $d(B,H)^2 = d(A,H) \cdot d(C,H)$

Se demuestra de manera similar, viendo la semejanza entre $\widehat{ABH}$ y $\widehat{BCH}$.

Observación

Estos teoremas nos dan un procedimiento geométrico para construir un segmento cuya medida sea la raíz cuadrada de la medida de otro segmento $\overline{AB}$ conocido: Sea C perteneciente a la semirrecta opuesta de $\overline{AB}$ tal que $d(A,C)=1$. Sea D el punto de intersección de la perpendicular a AB por A con una semicircunferencia de diámetro $\overline{BC}$. Por lugar geométrico de Thales, el ángulo $\widehat{BDC}$ es recto, y por el teorema de la altura, $d(A,D)^2 = d(A,B)$. Así que $d(A,D) = \sqrt{d(A,B)}$.



RECTA DE SIMSON

Investigando propiedades para llegar a la recta de Simson: M es un punto del plano, R, Q y P son las proyecciones ortogonales de M sobre los lados o prolongaciones de los lados del triángulo ABC.
A)Teniendo en cuenta los cuadriláteros MQPC y ARMQ, muestra que los ángulos PQM y PCM son iguales (o suplementarios), ídem para los ángulos RAM y RQM.. (Conocimientos previos condición necesaria y

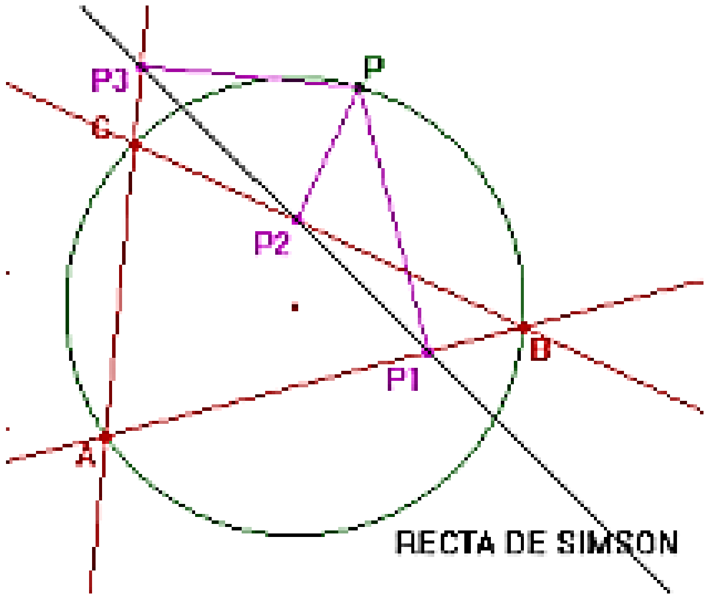
suficiente para que un cuadrilátero sea inscriptible, ángulos inscriptos). Lugar de Thales.

Recta de Simson

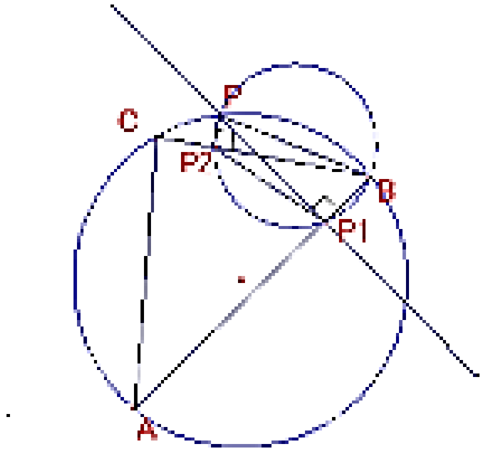
- Si consideramos un triángulo y su circunferencia circunscrita. Los tres puntos obtenidos al proyectar un punto P cualquiera de la circunferencia sobre las rectas que contienen a los lados del triángulo, están alineados (es decir, son colineales, están sobre una misma recta). La recta que contiene a estos tres puntos se conoce con el nombre de recta de Simson.

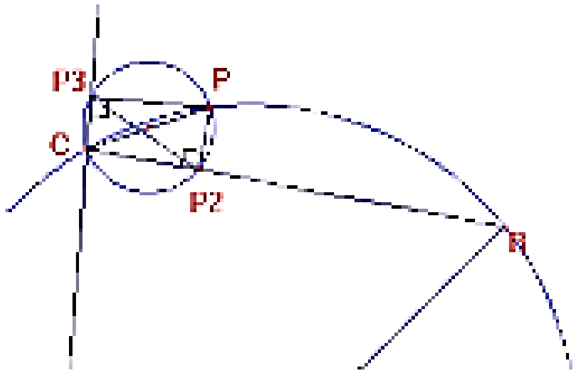
- Dicho de otra manera, la recta de Simson es la recta que contiene a los tres puntos obtenidos al proyectar un punto cualquiera de una circunferencia circunscrita a un triángulo sobre las rectas que contienen a los lados del triángulo. (Para proyectar un punto cualquiera de dicha circunferencia sobre las rectas que contienen a los lados del triángulo, se trazan rectas perpendiculares desde ese punto a las rectas que contienen los lados del triángulo)

DIBUJO DE LA RECTA DE SIMSON



Consideremos el triángulo ABC y un punto P sobre su circunferencia circunscrita. Los puntos P_1, P_2, P_3 son las proyecciones de P sobre las rectas que contienen a los lados del triángulo.



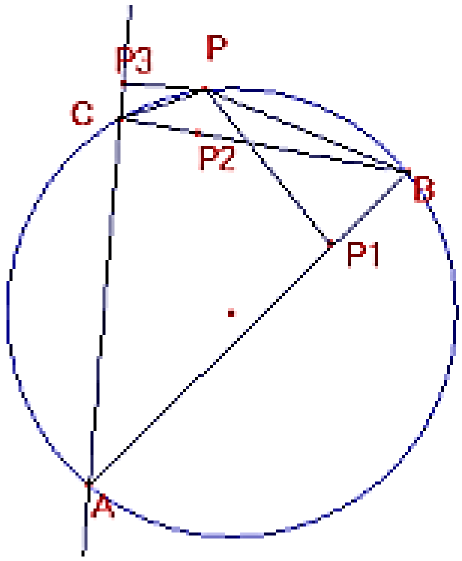


- Si nos fijamos en las proyecciones P_1 y P_2:

  Como el segmento PB es la hipotenusa del triángulo P_2BP y del triángulo P_2P_1B, entonces ambos triángulos rectángulos tienen circunscrita una circunferencia cuyo diámetro es el segmento PB.
  Como los ángulos $<P_1P_2B$ y $<P_1PB$ subtienden el mismo arco de circunferencia, entonces ambos ángulos son iguales. (Nota: Se utilizó el símbolo $<$ para denotar ángulo)

- De la misma forma, si ahora nos fijamos en las proyecciones P_2 y P_3:
  El segmento CP es la hipotenusa del triángulo CPP_3 y del triángulo CP_2P, entonces ambos triángulos rectángulos tienen circunscrita una circunferencia, cuyo diámetro es el segmento CP.
  Como los ángulos $<CP_2P_3$ y $<CPP_3$ subtienden el mismo arco de circunferencia, entonces ambos ángulos son iguales.

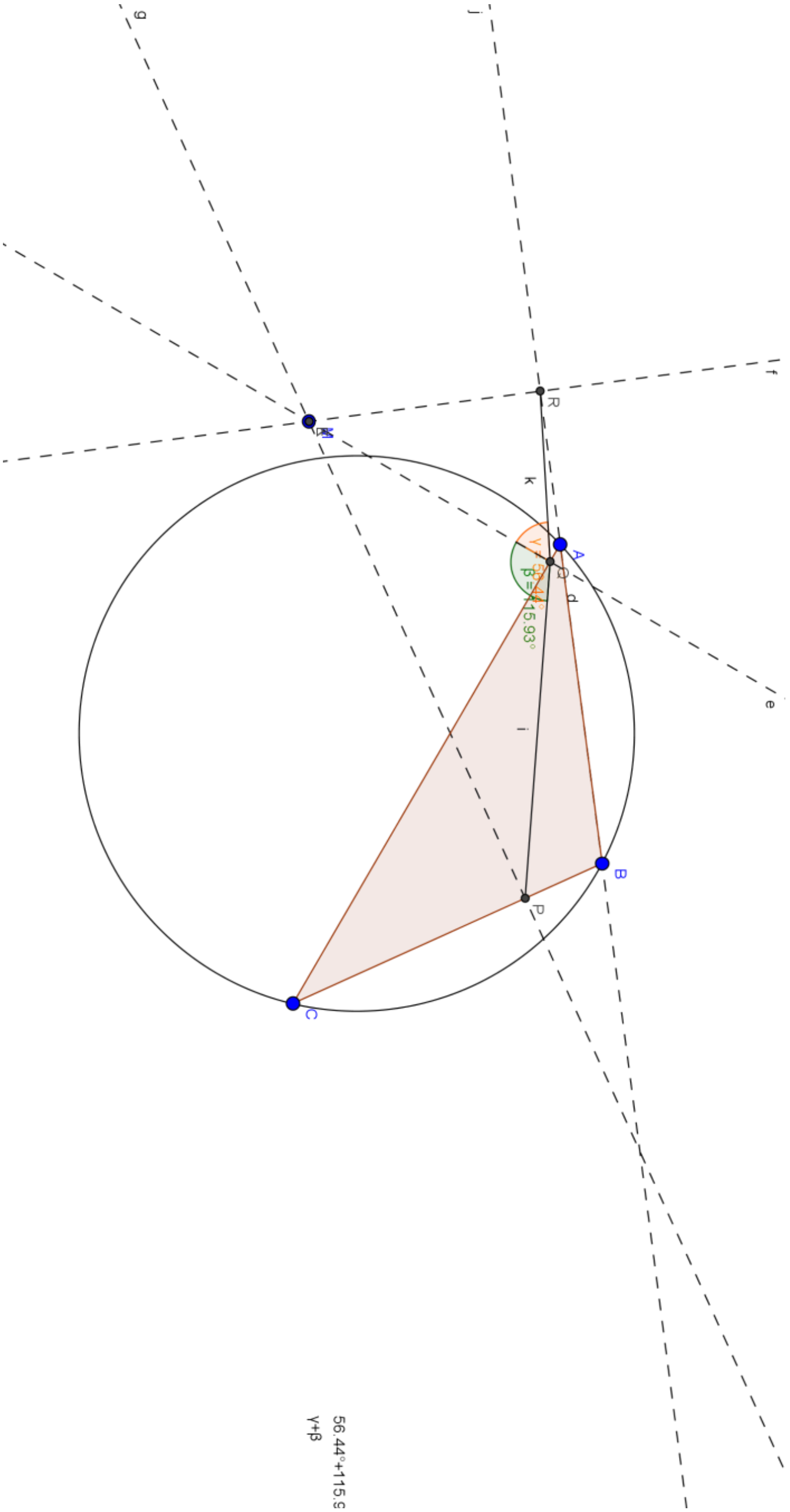
- Por último demostraremos que los ángulos $<P_1P_2B$ y $<CP_2P_3$ son iguales, siendo estos ángulos opuestos por el vértice al cortarse la recta de Simson y el lado CB; por lo que los puntos P_1, P_2 y P_3 están alineados. Para demostrar la igualdad de esos dos ángulos basta demostrar la de sus equivalentes $<P_1PB$ y $<CPP_3$.



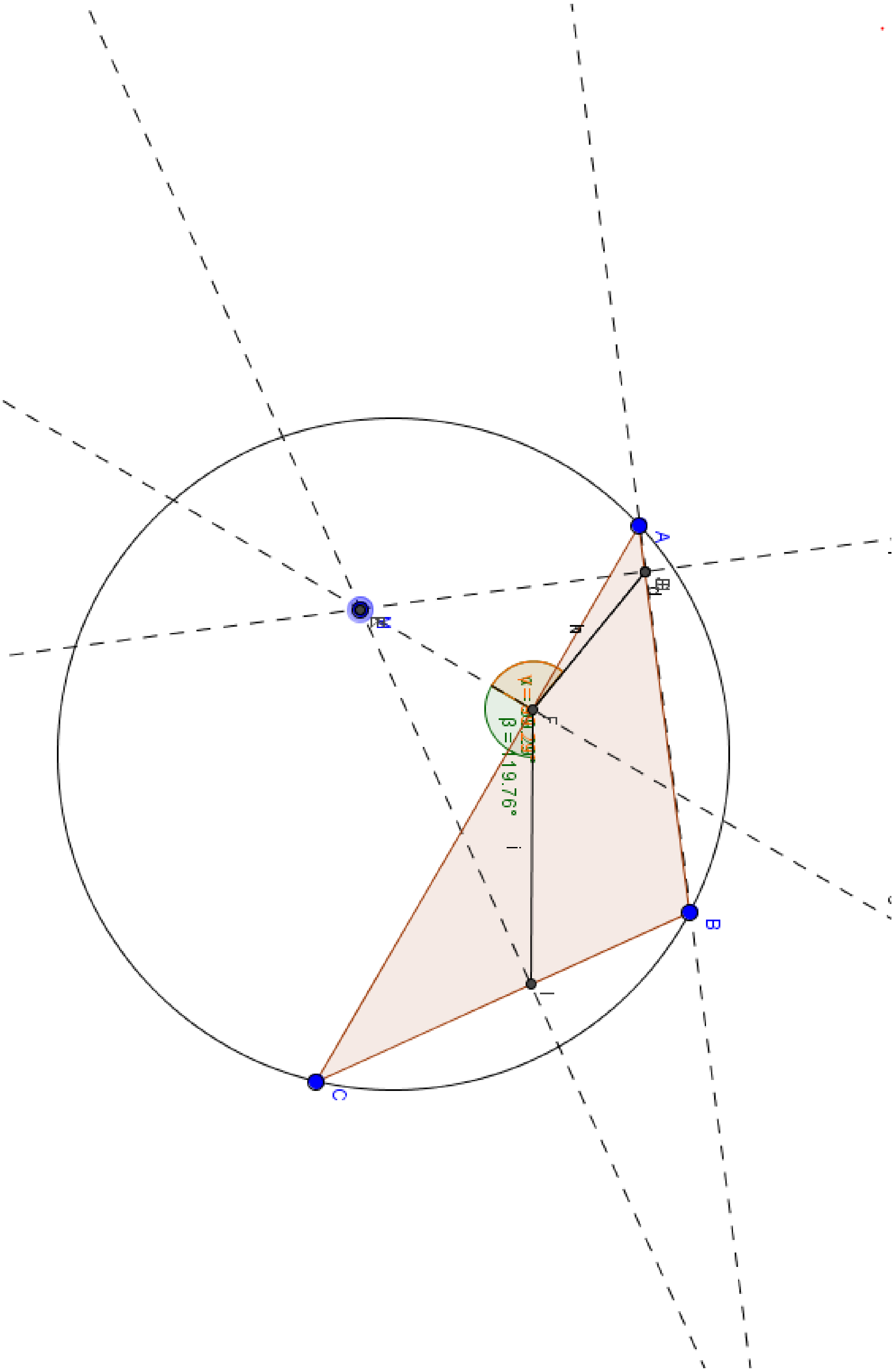
El ángulo <P_3PP_1 es suplementario de <CAB, ya que el cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia (esto es porque está formado por dos triángulos rectángulos de hipotenusa común, triángulo rectángulo APP_3 y triángulo rectángulo AP_1P).

El ángulo <CPB también es suplementario de <CAB, ya que el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia. Restando a ambos ángulos (<P_3PP_1 y <CPB) el ángulo <CPP_1 se obtiene que los ángulos <P_1PB y <CPP_3 son iguales.

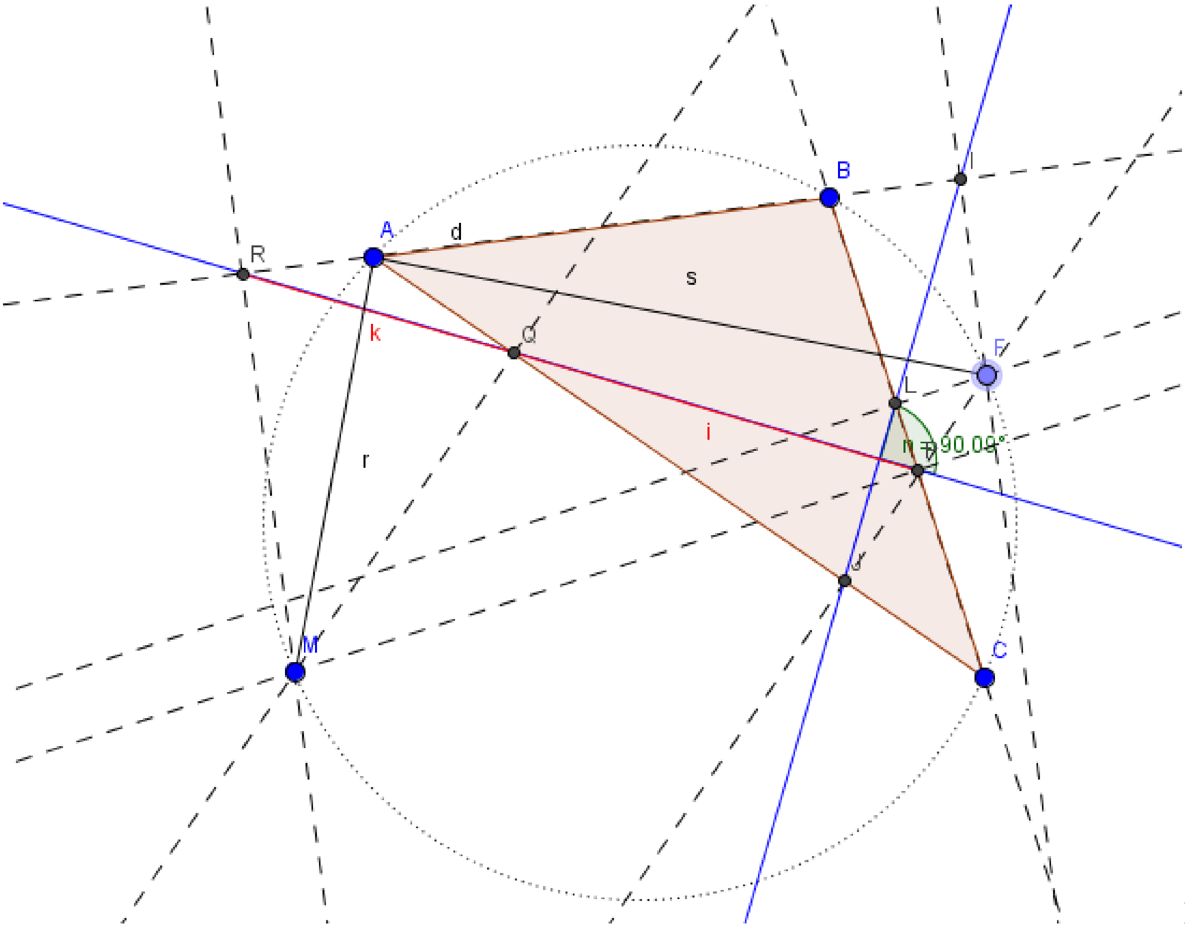
Por lo tanto los ángulos <P_1P_2PB y <CP_2P_3 son iguales (son ángulos opuestos por el vértice). Entonces los puntos P_1, P_2 y P_3 están alineados.



b) Investigar cuál es la condición para que las proyecciones ortogonales de M sobre los lados del triángulo, estén alineados.


A
B
C
β = 119.76°

c) Muestra que si M y M' son dos puntos de la circunferencia circunscripta al triángulo ABC, las rectas de Simson de M y M' son perpendiculares si M y M' son diametralmente opuestos. Realiza la investigación utilizando el programa Geogebra.

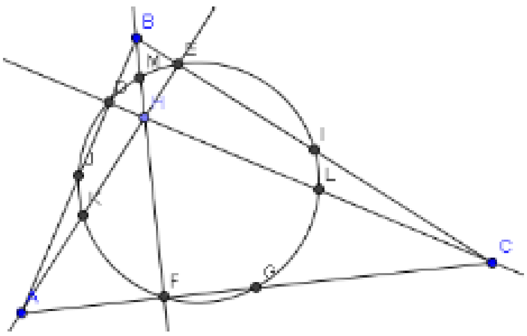


Identifica en la figura el punto M' que por error lleva otro nombre.

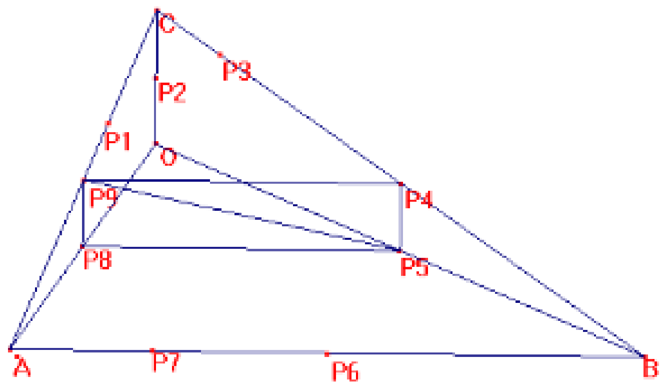
Circunferencia de Feuerbach (cfa de los nueve puntos)

Circunferencia de Feuerbach (cfa. de los 9 puntos)

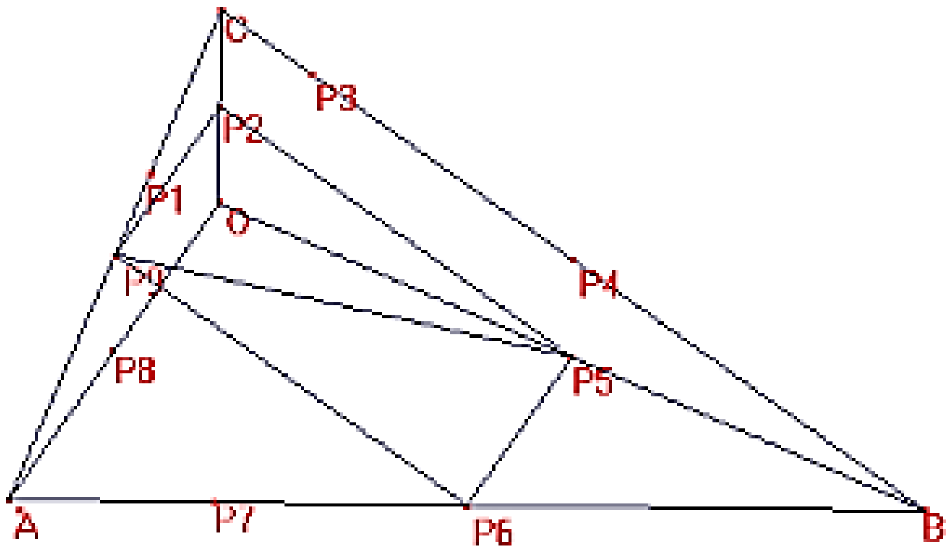
Para todo triángulo ABC existe una circunferencia que contiene los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los tres vértices.
Esta circunferencia se conoce con el nombre de circunferencia de los "nueve puntos" o de Feuerbach.



DEMOSTRACIÓN:



Los puntos P_9, P_4, P_5 y P_8 están sobre una misma circunferencia de diámetro P_9 P_5 ya que los ángulos <$P_9P_8P_5$ y <$P_9P_4P_5$ son rectos (P_9P_4 y P_8P_5 son paralelos y miden lo mismo por ser paralelas medias de triángulos con la misma base AB; lo mismo sucede con P_9P_8 y P_4P_5 por ser paralelas medias de triángulos con la misma base OC; además AB y OC son perpendiculares, razón por la cual $P_9P_4P_5P_8$ es un rectángulo).
El mismo razonamiento nos convence de que P_9,P_2, P_5 y P_6 están sobre la misma circunferencia de diámetro P_9P_5.

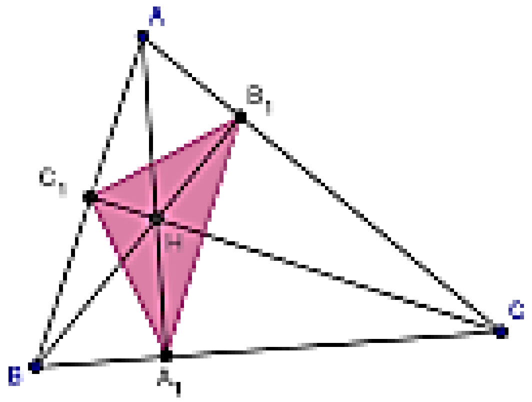


Por último como el ángulo $<P_2P_7P_6$ es recto y abarca el diámetro P_2P_6 de la circunferencia, resulta que el punto P_7, pie de la altura trazada desde C, también pertenece a la circunferencia anterior. Lo mismo sucede con P_1 y P_3.

Triángulo Órtico

Definición:

Dado un triángulo ABC llamamos triángulo órtico del ABC al triángulo cuyos vértices son los pies de alturas desde A, B y C.



Propiedad:

"Las tres alturas de un triángulo son bisectrices de su triángulo órtico"

o en otras palabras,

"El ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico"

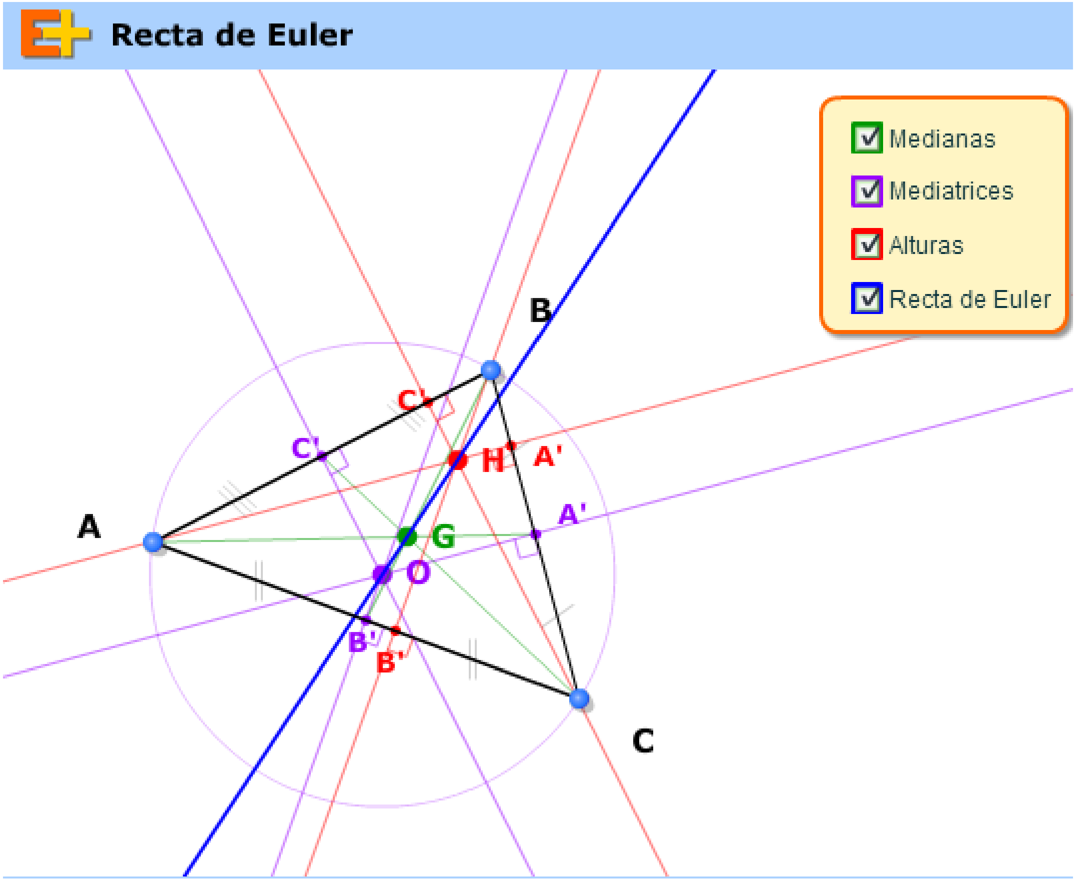
Demostración:

Sea ABC un triángulo y A_1, B_1 y C_1 los pies de la alturas desde A, B y C respectivamente.

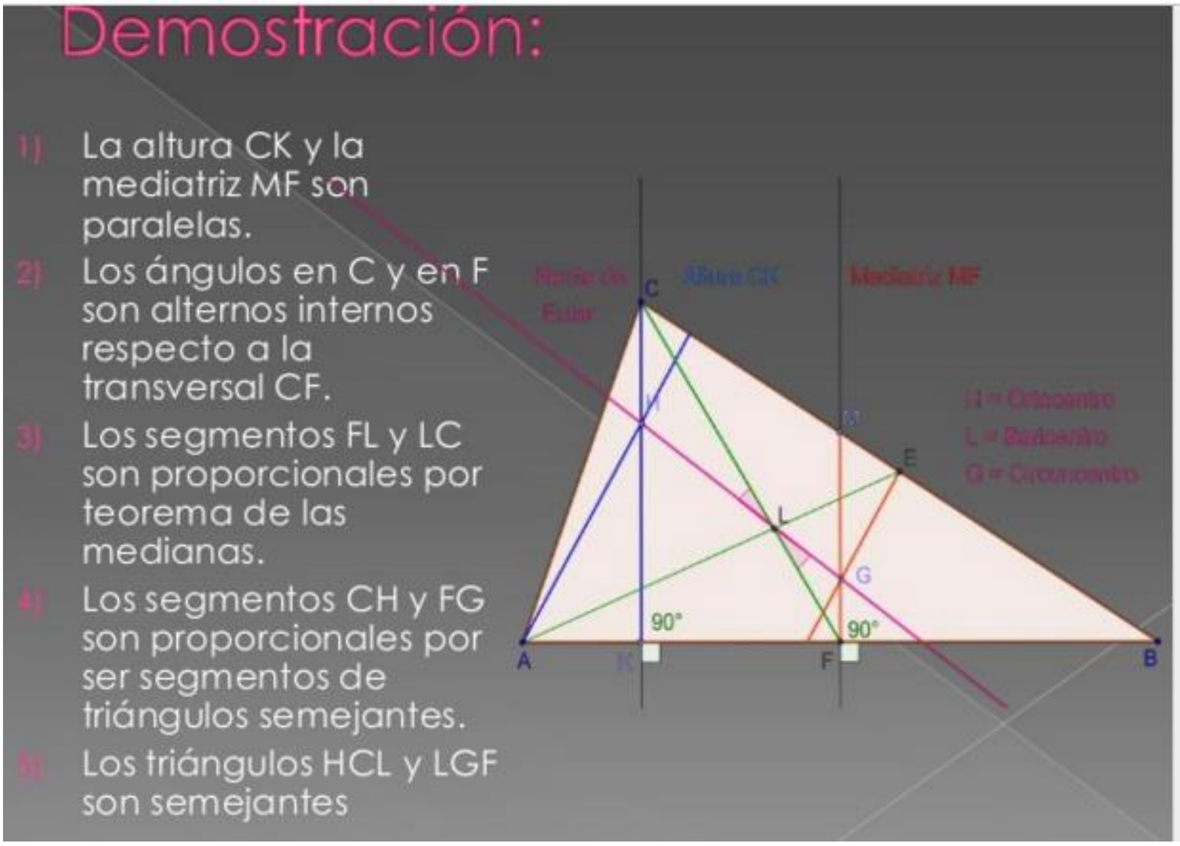
1- HA_1CB_1 es inscriptible porque los ángulos $HA_1C = HBC = 90°$
2- HA_1BC_1 es inscriptible porque los ángulos $HA_1B = HC_1B = B = 90°$
3- El ángulo AC_1C es rectángulo en C_1, el ángulo BB_1A es rectángulo en B_1
4- α = al ángulo $HA_1B_1 = HCB_1$ por inscripto en HA_1CB_1
5- En el triángulo AC_1C los ángulos $ACC_1 = HCB_1 = \alpha$
$C_1AC = 90° - \alpha$
6- En el triángulo AB_1B los ángulos $ABB_1 = 90° - \alpha$
$C_1AC = \alpha$
7- $ABB_1 = C_1BH = \alpha$
$C_1BH = C_1A_1H$ por inscriptible
En HA_1BC_1
8- $C_1A_1H = HA_1B_1 = \alpha$
9- Por lo tanto A_1H es bisectriz del ángulo $C_1A_1B_1$

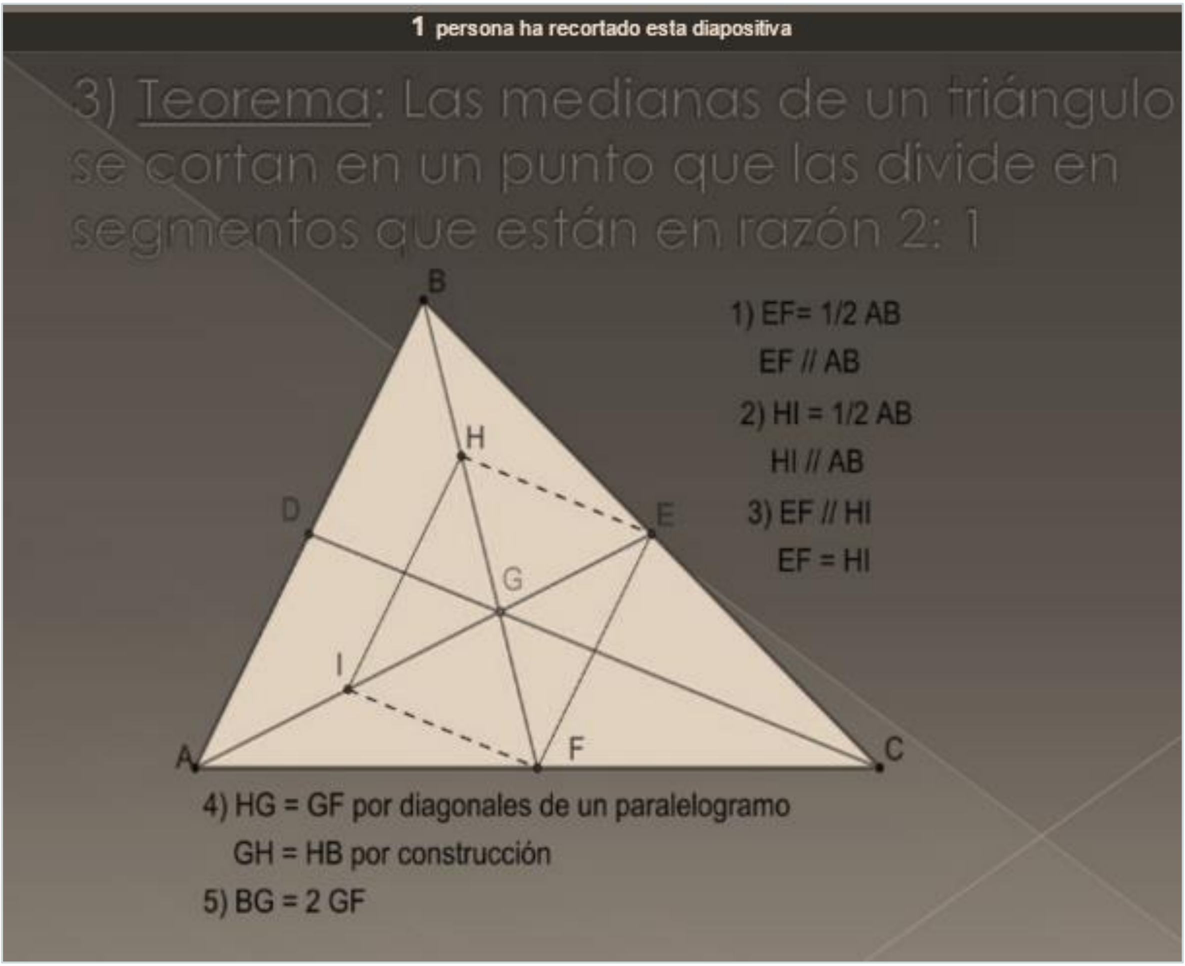
ANÁLOGAMENTE SE PRUEBA QUE LAS RESTANTES ALTURAS SON BISECTRICES EN EL TRIÁNGULO ÓRTICO

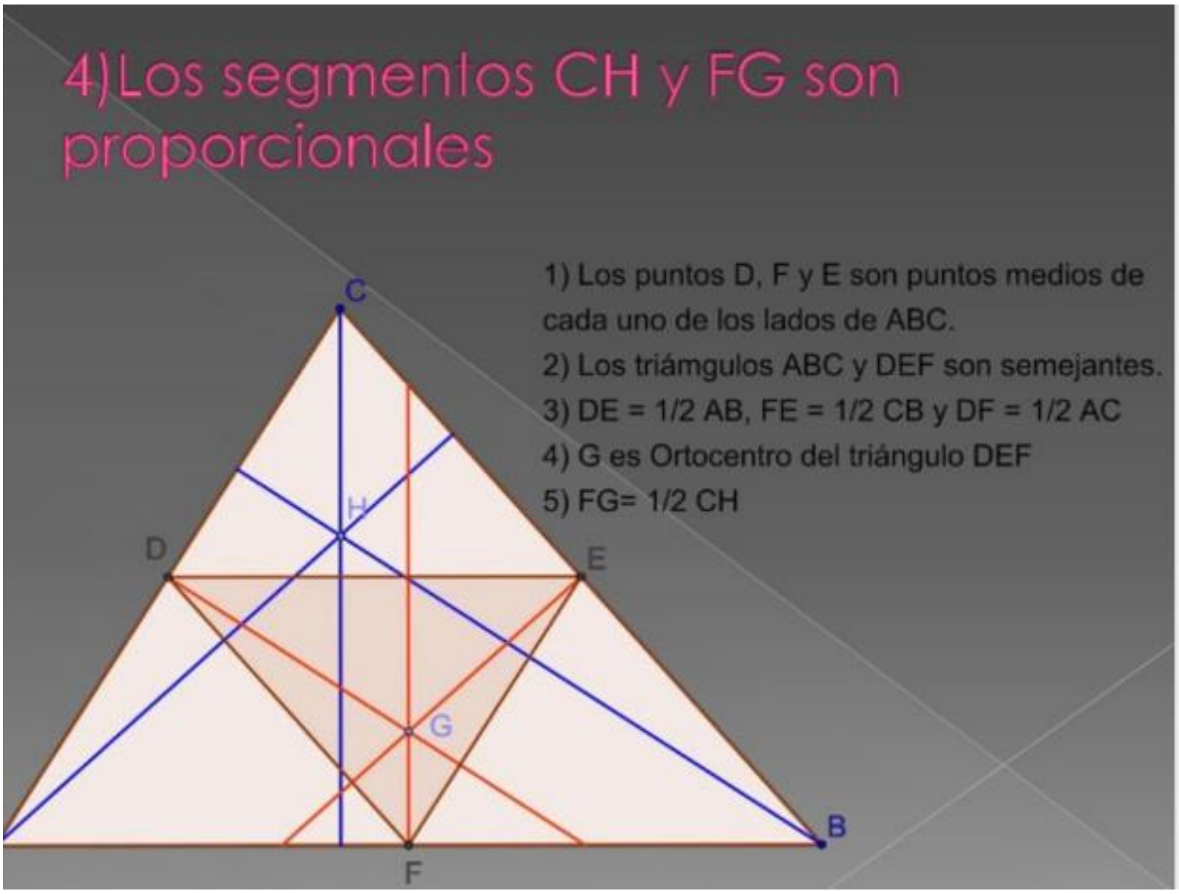
Recta de Euler



http://www.educaplus.org/play-180-Recta-de-Euler.html


Demostración:
1) La altura CK y la mediatriz MF son paralelas.
2) Los ángulos en C y en F son alternos internos respecto a la transversal CF.
3) Los segmentos FL y LC son proporcionales por teorema de las medianas.
4) Los segmentos CH y FG son proporcionales por ser segmentos de triángulos semejantes.
5) Los triángulos HCL y LGF son semejantes
Altura CK
Mediatriz MF
90°
90°


1 persona ha recortado esta diapositiva
3) Teorema: Las medianas de un triángulo se cortan en un punto que las divide en segmentos que están en razón 2: 1
1) EF= 1/2 AB
EF // AB
2) HI = 1/2 AB
HI // AB
3) EF // HI
EF = HI
4) HG = GF por diagonales de un paralelogramo
GH = HB por construcción
5) BG = 2 GF



Segmentos cuya medida es un número irracional

Para la parte de construcciones de segmentos cuya medida sea un número irracional se trabaja con el material 100 construcciones geométricas de Kormanisky

http://red.infd.edu.ar/blog/wp-content/uploads/2014/11/100-Construcciones-Geometricas-Resumen.pdf

Se complementa con el material que puede adquirirse en http://maralboran.org/web_ma/Anaya/USB/3ESO/documents/02_Lecturas_y_act.pdf