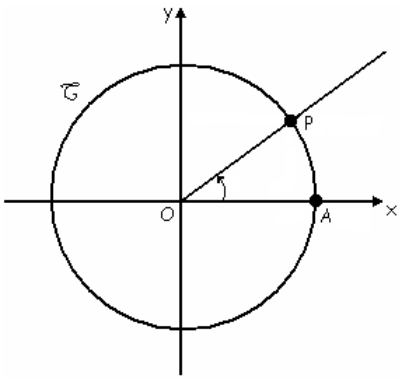


Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de centro O y radio r. El perímetro de $\mathcal{C}$ es $2\pi r$. Si consideramos un punto fijo de $\mathcal{C}$ (A) y uno variable (P), la medida del arco $\overset{\frown}{AP}$ es un número real entre 0 y $2\pi r$. Si usamos r = 1, el arco $\overset{\frown}{AP}$ es un número real entre 0 y 2π. Para indicar si trabajaremos con el arco $\overset{\frown}{AP}$ mayor o el menor, consideraremos de A hacia P el sentido antihorario. A cada punto de la circunferencia lo podemos relacionar con un número del $[0, 2\pi)$ y viceversa. Podemos entonces vincular la medida del ángulo $A\hat{O}P$ (en grados) con la medida del arco $\overset{\frown}{AP}$.

Tarea 1: Complete la tabla sin usar calculadora:

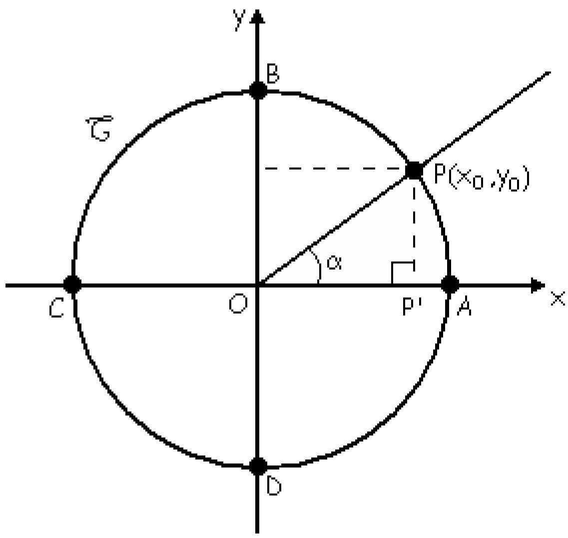
$A\hat{O}P$	0		45	60		120		150	180	225	270	300	
$\overset{\frown}{AP}$		$\pi/6$			$\pi/2$		$3\pi/4$		π				2π

Tarea 2: Complete usando calculadora (aproxime a minutos):

a) Si el arco $\overset{\frown}{AP}$ mide 1, el ángulo $A\hat{O}P$ mide . . . . grados.

b) Si el ángulo $A\hat{O}P$ mide 1 grado, el arco $\overset{\frown}{AP}$ mide . . . .

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.



Sea una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O(0,0) y radio 1, se considera $P(x_0,y_0)$ tal que $P \in \mathcal{C}$. Sean $\mathcal{C} \cap \overleftrightarrow{Ox} = \{A\}$ y

$A\hat{O}P = \alpha$.

Definición 1.

Llamaremos coseno del ángulo α a la abscisa del punto P.

En símbolos: $\cos \alpha = x_0$

Definición 2.

Llamaremos seno del ángulo α a la ordenada del punto P.

En símbolos: $\text{sen } \alpha = y_0$

Tarea 3: Complete observando el dibujo anterior:

a) Las coordenadas de los puntos A, B, C y D son (,), (,), (,) y (,) respectivamente.

b) En $\overset{\Delta}{OPP'}$, cos α es igual a la medida del lado . . . .

c) cos $\pi/3$ = ... (Recuerde que en un triángulo rectángulo con un ángulo de 60º, el cateto menor mide la mitad que la hipotenusa).

d) En $\overset{\Delta}{OPP'}$, sen α es igual a la medida del lado . . . .

e) sen $\pi/6$ = ... (Recuerde lo mencionado en la parte c).

f) El cos α es un número que varía entre . . . . y . . . .

g) El sen α es un número que varía entre . . . . y . . . .

Tarea 4: Demuestre que si $\alpha \in [0, 2\pi)$ entonces $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$ (utilice el teorema de Pitágoras en $\overset{\Delta}{OPP'}$).

Tarea 5: Utilice el teorema demostrado en la parte anterior para hallar (sin usar la calculadora):

a) sen $\pi/4$ y cos $\pi/4$.

b) cos $\pi/6$ (aproveche que ya conoce sen $\pi/6$).

c) sen $\pi/3$ (aproveche que ya conoce cos $\pi/3$).

TEOREMA

H) $P \in \overset{\frown}{AB}$, $P\hat{O}A = \alpha$ T) sen α = cos $(\pi/2 - \alpha)$ y cos α = sen $(\pi/2 - \alpha)$

Demostración:

Sea $Q \in \mathcal{C}$ / $Q\hat{O}A = \pi/2 - \alpha$

(complementario de α)

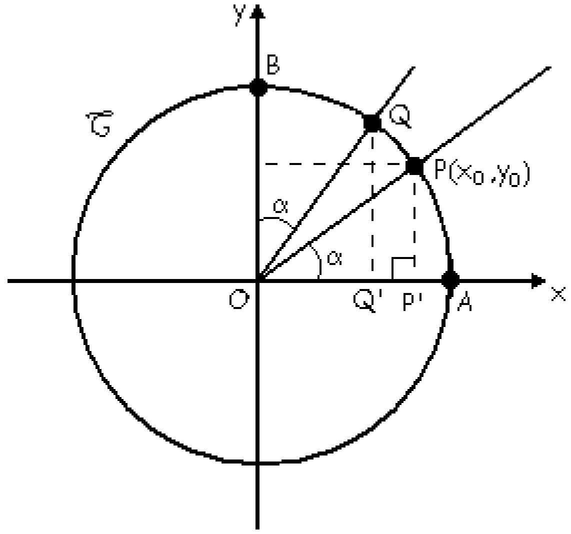
$\overset{\triangle}{OPP'} = \overset{\triangle}{OQQ'}$ pues:

1) $\overline{OP} = \overline{OQ}$

2) $P\hat{O}P' = O\hat{Q}Q'$

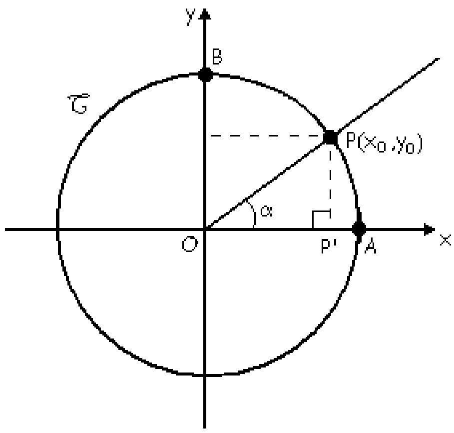
3) $P\hat{P'}O = Q\hat{Q'}O$

$\Rightarrow \overline{OP'} = \overline{QQ'}$ y $\overline{PP'} = \overline{OQ'} \Rightarrow$ T)

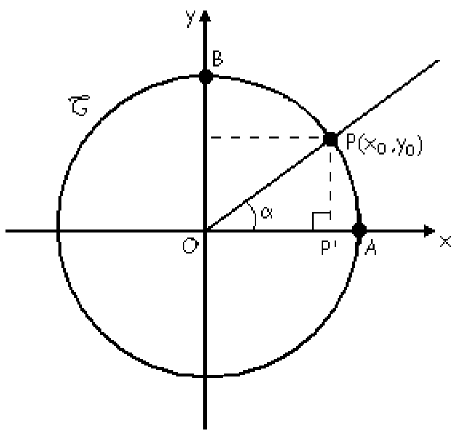


Tarea 6: Realice gráficos análogos al anterior y relacione a partir de ellos:

a) El sen α con el sen $(2\pi - \alpha)$ y el cos α con el cos $(2\pi - \alpha)$.



b) El sen α con el sen $(\pi - \alpha)$ y el cos α con el cos $(\pi - \alpha)$.



c) Complete la siguiente tabla:

α	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
sen α				
cos α				

d) Indique el signo en cada cuadrante:

α	I	II	III	IV
sen α				
cos α				

e) Halle (sin usar calculadora): sen $5\pi/6$, cos $11\pi/6$, sen $4\pi/3$, sen $5\pi/4$, cos $5\pi/4$.

Ejercicio 1

Resuelva en $[0, 2\pi)$ las siguientes ecuaciones:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Funciones Trigonométricas (Generalización).

Definición 3.

Diremos que una función es periódica de periodo p ($p \in \mathbb{R}^+$) si cumple:

$$f(x + p) = f(x)\ \forall x \in Dom(f).$$

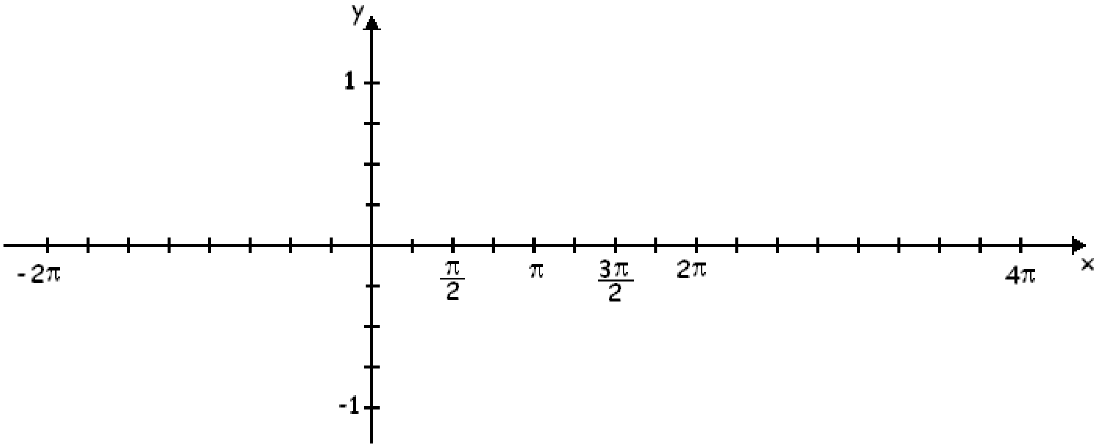
Observación:

- Las funciones sen x y cos x de dominio $\mathbb{R}$ son periódicas de periodo 2π. O sea: $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Tarea 7: Complete la tabla y bosqueje los gráficos respectivos en [-2π, 4π]:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
sen x								
cos x								

x	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
sen x								
cos x								



Ejercicio 2

Resuelva en IR, las siguientes ecuaciones:

a) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

b) $\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$

e) $\text{sen } 3x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos\ \dfrac{x}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Definición 4. Tangente.

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in Z \Leftrightarrow \text{Dom(tg } x) = \text{IR} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

Tarea 8: Calcule, a partir de los senos y cosenos respectivos:

a) tg $\pi/4$

b) tg $\pi/6$

c) tg $2\pi/3$

Tarea 9: Halle las relaciones existentes entre:

a) La tg α y la tg $(\pi/2 - \alpha)$.

b) La tg α y la tg $(-\alpha)$.

c) La tg α y la tg $(\pi - \alpha)$.

Ejercicio 3

Resuelva en $\mathbb{R}$, las siguientes ecuaciones:

a) $\text{tg } x = -1$
b) $\text{tg } 2x = -1$
c) $\text{tg } x = \sqrt{3}$
d) $\text{tg } \frac{x}{2} = \sqrt{3}$
e) $\text{tg } 2x - \text{sen } 2x = 0$

Ejercicio 4

Estudie el signo de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen } x$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
b) $f(x) = \text{sen } x$, en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
c) $f(x) = \cos x$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
d) $f(x) = \cos x$, en el intervalo $[0, \pi]$.
e) $f(x) = \text{tg } x$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
f) $f(x) = \text{tg } x$, en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Ejercicio 5

Estudie el signo de las siguientes funciones en $[0, 2\pi)$:

a) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x}$
b) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x}$