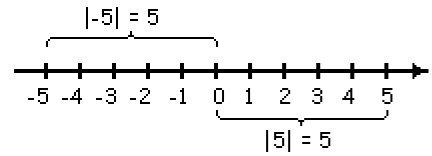
VALOR ABSOLUTO

El concepto de valor absoluto está relacionado con la idea de distancia entre dos puntos. En particular el valor absoluto de un número es su distancia respecto al número 0.

Por ejemplo, el valor absoluto de 5 es la distancia de 5 a 0, o sea 5.

En símbolos: $|5| = d(5, 0) = 5$.



Análogamente el valor absoluto de -5 es igual a la distancia de -5 a 0 (que también es 5).

En símbolos $|-5| = d(-5, 0) = 5$.

De manera algebraica se define el valor absoluto de la siguiente manera:

Definición de VALOR ABSOLUTO: Sea $a \in R$, $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Ejercicios:

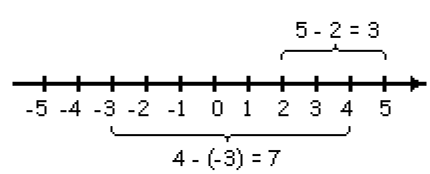
1. Expresa los siguientes números sin el símbolo de valor absoluto:
   a) $|\pi - 3|$ b) $|3 - \pi|$ c) $|x^6 + 1|$ d) $|y - 3|$

2. Halla, si existen, los $x \in R$ que cumplan:
   a) $|x| = 4$
   b) $|x| = -4$
   c) $\dfrac{1}{|x|} = 4$
   d) $|3x - 12| = 0$
   e) $|3x - 1| \cdot |x - 4| = 0$
   f) $|x - 4| + 1 = 0$
   g) $|x - 4|^2 = |x - 4|$
   h) $|x + 1| = |x - 9|$
   i) $|2x - 1| = |x + 3|$

En la siguiente figura podemos ver que la distancia entre dos puntos de la recta numérica puede calcularse utilizando la diferencia de las coordenadas.

Por ejemplo la distancia entre los puntos de coordenadas 2 y 5 es $5 - 2 = 3$.

De igual modo la distancia entre los puntos de coordenadas 4 y -3 es $4 - (-3) = 7$.



Como queremos que la distancia sea positiva, utilizamos el valor absoluto para definirla:

Definición de DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS:

Sean $a\in R$, $b\in R$ $d(a, b) = |a - b|$.

Podemos verificar que $d(4, -3) = |4 - (-3)| = |7| = 7$ y también $d(-3, 4) = |-3 - 4| = |-7| = 7$. O sea que no importa cuál de los dos números mencionemos primero la distancia es la misma.

Ejercicios:

3. Completa la tabla:

Valor Absoluto	**Distancia**	**Intervalo**	**Descripción**
$\lvert x - 3\rvert \leq 1$	$d(x, 3) \leq 1$		
	$d(x, -4) \leq 2$		
			$-2 \leq x \leq 2$
		$x\in(6, 10)$	

4. a) Representa en la recta numérica los números que están más cerca de 1 que de -2.
   b) Usando la parte anterior resuelve: $|x - 1| < |x + 2|$.

5. Expresa cada uno de los siguientes conjuntos como intervalos o unión de intervalos y represéntalos gráficamente.
   a) $\{x\in R \ / \ |x| \leq 5/2\}$
   b) $\{x\in R \ / \ |x| > 2\}$
   c) $\{x\in R \ / \ |x| > 0\}$
   d) $\{x\in R \ / \ |x - 4| > 3\}$

6. Expresa los siguientes conjuntos usando valor absoluto:
   a) $(-\infty, 2]\cup[4, +\infty)$ b) $(-\pi, \pi)$ c) $\{x\in R \ / \ x < -1 \text{ o } x > 5\}$

7. Investiga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Si son falsas muestra un ejemplo de su falsedad (contraejemplo):
   a) $|x| = |-x| \ \forall x\in R \Leftrightarrow x = 0$
   b) $|x - y| = |y - x| \ \forall x, y\in R$
   c) $|x + y| = |x| + |y| \ \forall x, y\in R$
   d) $|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{si } a \geq b \\ b - a & \text{si } a < b \end{cases}$
   e) $|a + b| = \begin{cases} a + b & \text{si } a \geq b \\ b - a & \text{si } a < b \end{cases}$
   f) $|a + b| = \begin{cases} a + b & \text{si } a \geq -b \\ -a - b & \text{si } a < -b \end{cases}$
   g) $|a + b| = \begin{cases} a + b & \text{si } a \geq -b \\ b - a & \text{si } a < -b \end{cases}$
   h) $\sqrt{x^2} = x \quad \forall x\in R$
   i) $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x\in R$