EJERCICIOS PROPUESTOS

Circunferencia

1) En cada ejercicio hallar la ecuación de la circunferencia que cumple:

1) El radio es igual a **6** y las coordenadas de su centro son **(– 1, 2)**.
2) Su centro es el origen de coordenadas y el radio es igual a tres.
3) Las coordenadas de su centro son **(2, – 3)** y **r = 7**.
4) Las coordenadas de su centro son **(4, – 2)** y radio **= 5**.

2)

1) Las coordenadas de su centro son **(5, 3)** y pasa por el punto de coordenadas **(2, 7)**.
2) Las coordenadas de su centro son **(6, – 8)** y pasa por el origen de coordenadas.
3) Las coordenadas de su centro son **(– 1, 2)** y pasa por **(2, 6)**.
4) Los puntos de coordenadas **(3, 2)** **(– 1, 6),** son extremos de uno de sus diámetros.
5) Las coordenadas de su centro son **(6, 0)** y pasa por el origen de coordenadas.
6) Pasa por el punto de coordenadas **(1, 2)** y tiene su centro en **(5, – 1)**.
7) Los puntos de coordenadas **(0, 0)** y **(5, 3)** pertenecen a la circunferencia y son diametralmente opuestos.
8) Pasa por los puntos de coordenadas **(6, 0)** **(0, 8)** **(0, 0)**
9) Pasa por los puntos de coordenadas **(8,1)** **(5,10)** **(– 1,– 2)**

3) Hallar la ecuación de las siguientes circunferencias.

1) Tangente a los ejes coordenados y que pasa por **(2, 1)** (dos soluciones).
2) Tangente al eje $\overrightarrow{ox}$ en **(3, 0)** y pasa por **(5, 2)**.
3) Pasa por **(2, 3)**, por el origen de coordenadas y tiene centro sobre $\overrightarrow{ox}$.
4) Su centro es **(– 4, 3)** y es tangente al eje $\overrightarrow{oy}$.
5) Por el punto **A(4, 2)** pasa una circunferencia que es tangente a los ejes coordenados. Hallar su ecuación. (dos soluciones)
6) Por el punto **P(1, 2)** pasa una circunferencia que es tangente al eje $\overrightarrow{ox}$ y cuyo **radio = 5**. Hallar su ecuación. (dos soluciones)
7) Su centro pertenece al segundo cuadrante, tiene **radio = 8** y es tangente a los ejes coordenados.
8) Tangente a $\overrightarrow{ox}$ con centro sobre $\mathbf{y} = \mathbf{x} - 2$, y pasa por **(4, 4)**.
9) Tiene centro en **(12, 9)** y pasa por el punto medio del segmento determinado por la recta $3\mathbf{x} + 4\mathbf{y} - 24 = 0$ al cortarse con los ejes coordenados.

4) ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones representan a una circunferencia real y cuáles no? ¿por qué? dar centro y radio, si corresponde.

i) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ *ii)* $x^2+y^2-2x+4y+20=0$ *iii)* $x^2+y^2=-1$

iv) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$ *v)* $(x+2)^2+y^2=64$ *vi)* $(x-5)^2+(y+2)^2=0$

5) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia **(*C*)** de radio igual a 5, concéntrica a la circunferencia **(*C'*)** de ecuación: $x^2+y^2+6x+10y-15=0$**.**

6) Determinar la ecuación de una recta *(r)* que pasa por el centro de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ y es perpendicular a la recta de ecuación: $3x-2y+7=0$

7) a) Hallar la ecuación de la circunferencia *(C)* que pasa por: **(5, 2), (3, 4), (1, –2).**
b) Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia con:
i) El eje $\overrightarrow{ox}$. *ii)* El eje $\overrightarrow{oy}$.

8) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de intersección de la recta de ecuación $\mathbf{x+y=3}$ y la circunferencia de ecuación: $\mathbf{x^2+y^2=5}$?

9) Hallar las coordenadas de los puntos de corte de la recta *(r)* $2x+y-2=0$ y la circunferencia de centro en C(1, 2) y radio = 2.

10) Encontrar la ecuación de una circunferencia *(C)*, cuyo diámetro es el segmento de recta determinado por la intersección de la recta de ecuación $\mathbf{3x+y-25=0}$ y la circunferencia de ecuación: $\mathbf{x^2+y^2=65}$.

11) *i)* Hallar la ecuación de la circunferencia *(C)* que pasa por los puntos **A(– 2, 2)** y **B(7, 5)** y cuyo centro pertenece a la recta $2x-3y=0$

ii) Hallar las coordenadas de los puntos de intersecciones de *(C)* con las rectas de ecuación: *(r)* $x-2y+6=0$ *(p)* $x-2y-4=0$.

iii) Verificar que los puntos obtenidos forman un rectángulo cuyo centro coincide con el de **(C)**.

12) Un cuadrado tiene uno de sus vértices en el origen de coordenadas y el vértice opuesto es el punto de coordenadas **(– 6, 2)**. Determinar:
i) Las coordenadas de los otros vértices.
ii) Las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados.
iii) Las ecuaciones de las rectas que contienen a sus diagonales.

13) Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia *(C)* de centro **(2, 0)** y radio igual a **4** y la circunferencia *(C')* de centro en **(5, 0)** y que pasa por el origen.

14) Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia *(C)* de radio 2, y cuyo centro es el punto **(2,3)** y la circunferencia *(C')* $x^2+y^2-8x-2y+13=0$.

15) El centro de una circunferencia *(C)* pertenece a la recta de *(p)* de ecuación $x + y = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia *(C)* si se sabe además que pasa por los puntos de intersección de las siguientes circunferencia dadas por las ecuaciones: *(C')* $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 50$ *(C'')* $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$

16) Demostrar analíticamente que las circunferencias dadas por las ecuaciónes: *(C)* $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ *(C')* $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$ son tangentes. Hallar las coordenadas del punto de tangencia.

17) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto dado a las siguientes circunferencias dadas por su ecuación.

i) $x^2 + y^2 = 5$ en $P(-1, 2)$ *ii)* $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ en $P(-5, 7)$

iii) $x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$ en $P(6, 3)$ *iv)* $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ en $P(1, 2)$

18) Para qué valores de **b** la recta *(r)* de ecuación: $y = -x - \mathbf{b}$ es tangente a la circunferencia *(C)* de ecuación $x^2 + y^2 = 25$.

19) Verifique que la recta *(p)* $y = 2x - 1$ es tangente a la circunferencia *(C)* $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ y hallar las coordenadas del punto de tangencia.

20) *i)* Dados los puntos de coordenadas: **A(2,0)** y **T(4,2)**. Hallar la ecuación de una circunferencia *(C)* de centro C / $C \in \overrightarrow{ox}$, y tangente a la recta **(AT)** en el punto **T**.

ii) Sea **B** el cuarto vértice del paralelogramo **(ABCT)**. Hallar las coordenadas del punto **B**.

iii) Demostrar que **B**$\in (C)$.

21) *i)* Hallar la ecuación de la circunferencia *(C)* que es tangente a la recta *(t)* $x + y - 5 = 0$ en el punto **M(4,1)** y cuyo centro **C** pertenece a la recta *(n)* $x + 2y = 0$

ii) Sea **A** el punto de intersección de *(C)* con $\overrightarrow{oy}$, cuya ordenada es positiva y *(t)* la recta tangente a *(C)* en **A**; $(t) \cap \overrightarrow{ox} = \{\mathbf{B}\}$.
Calcular el área del triángulo **OAB**.

22) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto de coordenadas **P(4,−4)** a la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$.

23) Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia de ecuacion $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 35 = 0$ trazadas desde el punto de coordenadas **(6, −4)**.

24) *i)* Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto de coordenadas **A(1,6)** a la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$.

ii) Hallar la longitud de la cuerda que une los puntos de tangencia.

25) Hallar los puntos bases del haz de circunferencias dado por la ecuación:

$$(C_\lambda)\quad x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda - 1)y - \lambda = 0$$

26) *i)* Escribir la ecuación del haz de circunferencias al cual pertenesen las siguientes circunferencias: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ $\quad x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$.

ii) Encontrar la ecuación de la circunferencia del haz que pasa por **(–1,2)**.

iii) Encontrar la ecuación de la circunferencia del haz cuyo centro pertenece a la recta de ecuación: $x + y + 4 = 0$.

27) Sea la ecuación de la circunferencia $(C)\ x^2 + y^2 + x + 3y = 0$.

i) Hallar la ecuación de la tangente a (C) en el punto de coordenadas: **(– 1, 0)**

ii) Hallar la ecuación de una circunferencia (C') tangente a (C) en **(– 1, 0)** y que pasa por **(0, 1)**.

28) *i)* Verificar que la circunferencias dadas por las ecuaciones:

$(C)\ x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0 \qquad (C')\ x^2 + y^2 - 5 = 0$ son tangentes.

ii) Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a (C) y (C') en su punto común y que pasa por **A(7, 2)**.

iii) Verificar que el centro de esta circunferencia pertenece a la recta que pasa por los centros de (C) y (C').

29) Se considera la familia de circunferencias dadas por la ecuación:

$$(C_\lambda)\quad x^2 + y2 - 2\lambda x - (\lambda + 3)y + 4\lambda + 1 = 0$$

i) Probar que las (C_λ) constituyen un haz de circunferencias, hallar las coordenadas de sus puntos bases y la ecuación del eje radical.

ii) Hallar la ecuación del haz ortogonal.

30) Sea **A(2, 0)** y $(C)\ x^2 + y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$, una recta (r) variable que pasa por **O(0, 0)** corta (C) en **B** y **D**.

i) Hallar la ecuación de las circunferencias (C') que pasan por **A**, **B** y **D**.

ii) Demostrar que al variar (r) la familia de circunferencias (C') anteriores forman haz determinando sus puntos bases.

iii) Hallar la ecuación del haz ortogonal.

31) Representar las siguientes regiones:

i) $\begin{cases} x - y + 2 \le 0 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$ $\qquad$ ii) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x < 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$ $\qquad$ iii) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y < 0 \\ x - y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

RESULTADOS: EJERCICIOS DE CIRCUNFERENCIA

1) **1)** $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 31 = 0$ **2)** $x^2 + y^2 - 9 = 0$ 3) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$
4) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$

2) 1) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ 2) $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0$ 3) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$
4) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$ 5) $x^2 + y^2 - 12x = 0$ 6) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0$
7) $x^2 + y^2 - 5x - 3y = 0$ 8) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 9) $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 25 = 0$

3) 1) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 2) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$
3) $2x^2 + 2y^2 - 13x = 0$ 4) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$
5) $x^2 + y^2 - 20x - 20y + 100 = 0$ $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
6) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$ 7) $x^2 + y^2 + 16x - 16y + 64 = 0$
8) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ $x^2 + y^2 - 24x - 20y + 144 = 0$ 9) $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 125 = 0$

4) *i)* Si, C(1, – 2) r = 5 *ii)* No, circunferencia imaginaria *iii)* No, circunferencia imaginaria
iv) Si, C(5, – 2) r = 5 *v)* Si, C(– 2, 0) r = 8 *vi)* No, es un punto.

5) $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$ **6)** $2x + 3y + 4 = 0$

7) a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ b) *i)* (5, 0) (– 1, 0) *ii)* $\left(0, 1 \pm \sqrt{6}\right)$ **8)** (2, 1) (1, 2)

9) (1, 0) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{16}{5}\right)$ **10)** $x^2 + y^2 - 15x - 5y + 60 = 0$

11) *i)* $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ *ii)* (– 2, 2) (6, 6) (8, 2) (0, – 2) *iii)* centro (3, 2)

12) *i)* (– 2, 4) (– 4, – 2) *ii)* $2x + y = 0$ $2x + y + 10 = 0$ $x - 2y = 0$ $x - 2y + 10 = 0$
iii) $x + 3y = 0$ $3x - y + 10 = 0$

13) *(C)* $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ *(C')* $x^2 + y^2 - 10x = 0$ (2, 4) (2, – 4)

14) $(C) \cap (C') = \{ (4, 3), (2, 1)\}$ **15)** $(C') \cap (C'') = \{ (-4, 0), (0, 2)\}$ *(C)* $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 8 = 0$

16) $\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ **17)** *i)* $x - 2y + 5 = 0$ *ii)* $3x - 4y + 43 = 0$ *iii)* $2x + 3y - 21 = 0$ *iv)* $3x + y - 5 = 0$

18) $b = \pm\sqrt{50}$ **19)** tangente en (1, 1) **20)** *(C)* $x^2 + y^2 - 12x + 28 = 0$ B(4, – 2)

21) *i)* *(C)* $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ *ii)* A(0,1) *(t)* $-x + y - 1 = 0$ B(– 1, 0) área = $\frac{1}{2}$

22) Ecuación de la polar $x - 3y - 11 = 0$ polar ∩ Circunferencia = { (5, – 2), (2, – 3)}
Ecuación de las tangentes trazadas desde (4, – 4) a la circunferencia: $2x - y - 12 = 0$ $x + 2y + 4 = 0$

23) Ecuación de la polar $7x - 5y - 25 = 0$ polar ∩ Circunferencia = { (0, – 5), (5, 2)}
Ecuación de las tangentes trazadas desde (6, – 4) a la circunferencia: $-x + 6y + 30 = 0$ $-6x - y + 32 = 0$

24) *i)* Ecuación de la polar $x + 3y - 9 = 0$ polar ∩ Circunferencia = { (– 3, 4), (3, 2)}
Ecuación de las tangentes trazadas desde (1, 6) a la circunferencia: $x - 2y + 11 = 0$ $2x + y - 8 = 0$
ii) Longitud de la cuerda $\sqrt{40}$

25) (0, 1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

26) *i)* $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 + \lambda(x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3) = 0$ *ii)* $13x^2 + 13y^2 - 100x - 162y + 159 = 0$
iii) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 22y + 1 = 0$

27) *i)* $-x + 3y - 1 = 0$ *ii)* *(C')* $x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$

28) *i)* Punto de tangencia (1, 2) *ii)* $3x^2 + 3y^2 - 24x - 48y + 105 = 0$ *iii)* $2x - y = 0$

29) *i)* Punto base (1, 2) Eje radical: $2x + y - 4 = 0$ *ii)* haz ortogonal: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(-x + 2y - 3) = 0$

30) Se parte de un haz de circunferencias de ecuación: $x^2 + y^2 - 2x - 3y - 1 + \lambda(y - mx) = 0$

i) *(C')* $(2x^2 + 2y^2 - 3x - 6y - 2)m - y = 0$ *ii)* (2,0) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

iii) haz ortogonal: $x^2 + y^2 - 4x + 4 + \lambda\left(x^2 + y^2 + x + \frac{1}{4}\right) = 0$

31)