EJERCICIOS PROPUESTOS

Cónicas

1) Reconocer y dar algunos de los elementos principales de las siguientes cónicas dadas por sus ecuaciones:

1) $4x^2+9y^2+24x+36y+36=0$ 2) $25x^2-14xy+25y^2-28=0$

3) $2x^2-3y^2+4x+12y-4=0$ 4) $x^2-2xy+y^2+x-2y+5=0$

5) $x^2+xy+y^2-5x-4y+2=0$ 6) $2x^2+\sqrt{3}\,xy+y^2-2x-2y+2=0$

7) $x^2-2xy+y^2-2x-4y-5=0$ 8) $y^2-\sqrt{3}\,xy+2x-4=0$

9) $3x^2-2xy+3y^2-2x-10y+9=0$ 10) $3x^2+10xy+3y^2+8=0$

11) $2x^2+xy+2y^2-90=0$

2) Probar que la cónica dada por la ecuación $4xy+4x-1=0$ es una hipérbola equilátera. Hallar sus elementos principales.

3) Discutir según $\lambda\in\mathbb{R}$, género y degeneramiento de las cónicas dadas por las siguientes ecuaciones. En los casos en que degenera, hallar las ecuaciones de los elementos que la constituyen.

i) $\lambda x^2-y^2+x+y+1=0$

ii) $\lambda x^2-2xy+\lambda y^2+2x-2(\lambda+1)y+2=0$

iii) $\lambda x^2+3xy-\lambda y^2-x+(\lambda+1)y-1=0$

4) Hallar la ecuación de la tangente a las siguientes cónicas en los puntos indicados.

i) $x^2+xy+y^2-4x-8y+4=0$ en (4, 2) *ii)* $xy-y^2+x-3y=0$ en (0, 0)

iii) $xy-4=0$ en (2, 2) *iv)* $x^2+4xy+6y-7=0$ en (– 1, 3)

5) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los centros de la familia de cónicas dadas por la ecuación: (C_λ) $x^2+2\lambda xy-y^2+4\lambda x-2y=0$

6) Sea la familia de cónicas dadas por la ecuación:

$$(C_\lambda)\quad \lambda^2x^2+2(1-\lambda)xy+y^2+2(\lambda-3)x-6y+9=0\ \lambda\in\mathbb{R}$$

i) Demostrar que para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, las cónicas representadas por (C_λ) son tangentes al eje $\vec{oy}$.

ii) Discutir género y naturaleza de (C_λ), y escribir la ecuación de las cónicas degeneradas de la familia.

iii) Hallar la ecuación de la envolvente de (C_λ). Reconocer y hallar elementos.

iv) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los centros de (C_λ) al variar $\lambda\in\mathbb{R}$, reconocer y hallar sus elementos

RESULTADOS: EJERCICIOS DE CÓNICAS

1) 1) Elipse real, con centro de simetría en $(-3, -2)$, longitud semieje mayor = 3, longitud semieje menor = 2.
2) Elipse real, con centro de simetría en $(0, 0)$.
3) Hipérbola real, con centro de simetría en $(-1, 2)$ y asíntota de ecuación: $y = \sqrt{\frac{2}{3}}\,x + \sqrt{\frac{2}{3}} + 2$
4) Parábola real.
5) Elipse real, con centro de simetría en $(2, 1)$.
6) Elipse imaginaria.
7) Parábola real.
8) Hipérbola real, con centro de simetría en $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ y asíntota de ecuación: $-x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{2}{3} = 0$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$
9) Elipse real, con centro de simetría en $(1, 2)$.
10) Hipérbola real, con centro de simetría en $(0, 0)$ y asíntotas de ecuación: $3x + y = 0$, $x + 3y = 0$
11) Elipse real, con centro de simetría en $(0, 0)$.

2) Hipérbola equilátera, con centro de simetría en $(0, -1)$ y asíntotas de ecuación: $y + 1 = 0$ $x = 0$

3) *i)*

$\lambda > 0 \begin{cases} \lambda = \frac{1}{5} & \text{Degenera en dos rectas: } 2x + 2\sqrt{5}\,y + 5 - \sqrt{5} = 0 \quad 2x - 2\sqrt{5}\,y + 5 + \sqrt{5} = 0 \\ \lambda > 0 \text{ y } \lambda \neq \frac{1}{5} & \text{Hipérbolas reales.} \end{cases}$

$\lambda = 0$ Parábola real.
$\lambda < 0$ Elipses reales.

ii)

$-1 < \lambda < 1 \begin{cases} \lambda = 0 & \text{Degenera en dos rectas: } x = -1 \quad y = 1 \\ \lambda \neq 0 & \text{Hipérbolas reales.} \end{cases}$

$\lambda = 1, \lambda = -1$ Parábola real.

$\lambda < -1, \lambda > 1$ Elipses reales.

iii)

$\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} \lambda = 2 & \text{Degenera en dos rectas: } 2x - y + 1 = 0 \quad x + 2y - 1 = 0 \\ \lambda \neq 2 & \text{Hipérbolas reales.} \end{cases}$

4) *i)* $x - 4 = 0$ *ii)* $x - 3y = 0$ *iii)* $x + y - 4 = 0$ *iv)* $5x + y + 2 = 0$

5) $x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0$

6) *i)* Tangente en el punto de coordenadas $(0, 3)$

ii)

$\lambda < \frac{1}{2} \begin{cases} \lambda = 0 & \text{Degenera en dos rectas de ecuaciónes: } 2x + y - 3 = 0 \quad y - 3 = 0 \\ \lambda \neq 0 & \text{Hipérbolas reales.} \end{cases}$

$\lambda = \frac{1}{2}$ Parábola real.

$\lambda > \frac{1}{2}$ Elipses reales.

iii) Envolvente de ecuación: $xy - 3x - 2y + 4 = 0$ hipérbola con centro de simetría en: $(3, 2)$
iv) $x^2 + 2xy - 8x - 2y + 6 = 0$ hipérbola con centro de simetría en: $(1, 3)$