CONTINUIDAD.

Definición. Una función es **continua en x = a** si y sólo si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

CONTINUIDAD.

<u>Definición</u>. Una función es **continua en x = a** si y sólo si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

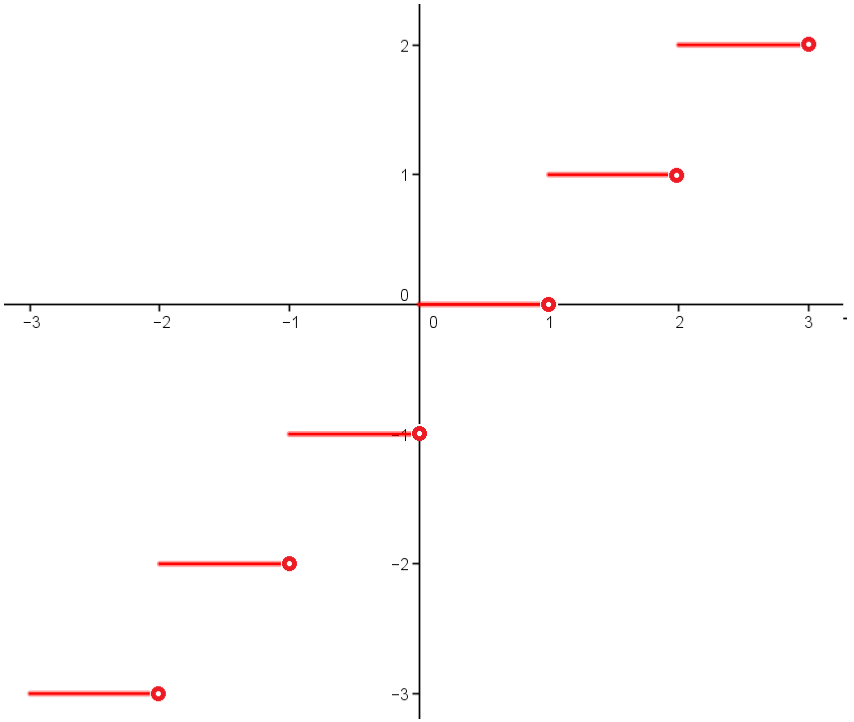
Esto implica 3 cosas:

- Que la función esté definida en “a” o sea $a \in D(f)$.
- Que exista el límite de f(x) cuando “x” tiende a “a”.
- Que dicho límite coincida con la imagen de “a”.

Consideremos la función parte entera con $x \in [-3, 3)$.

¿Para qué valores de "x" esta función no es continua?

$$E(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



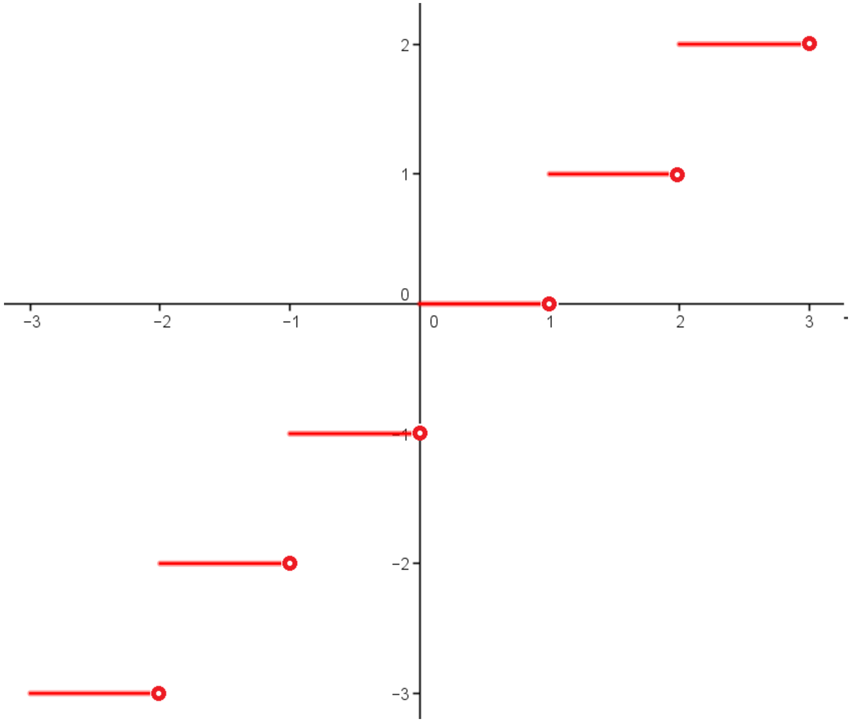
CONTINUIDAD.

Consideremos la función parte entera con $x \in [-3, 3)$.

¿Para qué valores de "x" esta función no es continua?

No es continua en -3, ni en -2, ni en -1, ni en 0, ni en 1, ni en 2

$$E(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

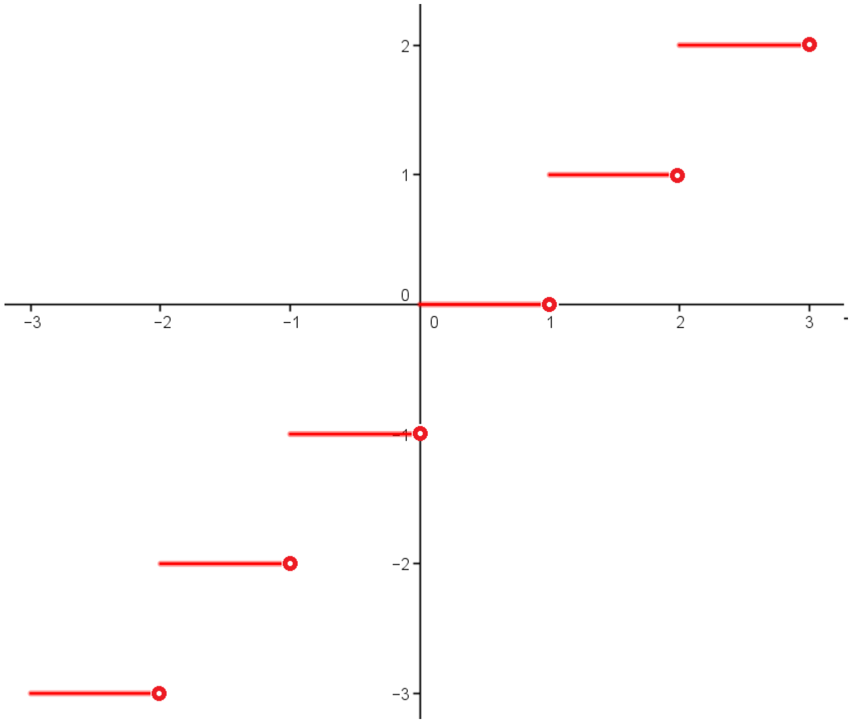


Consideremos la función parte entera con $x \in [-3, 3)$.

¿Para qué valores de "x" esta función no es continua?

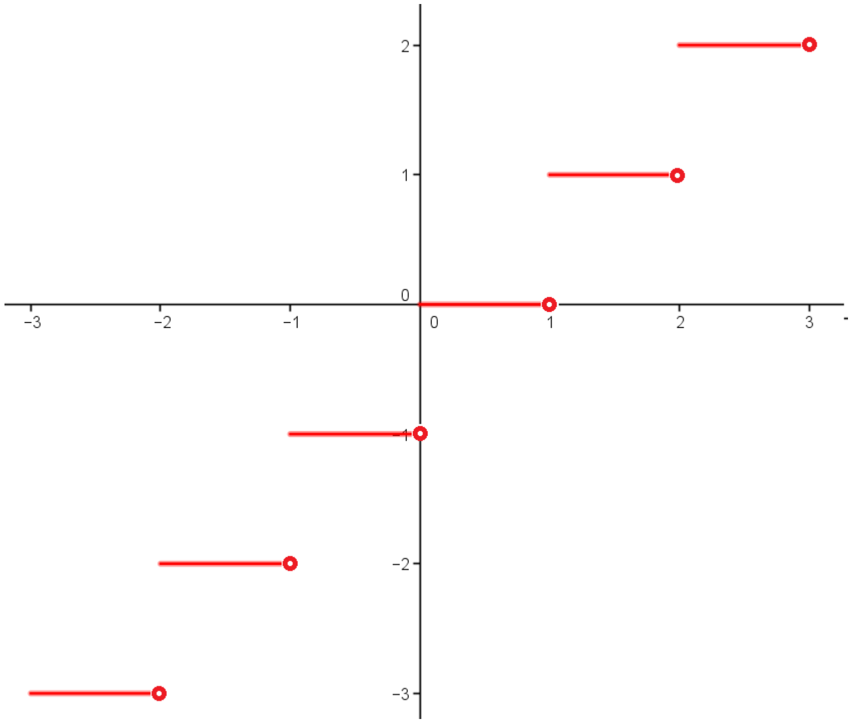
No es continua en -3, ni en -2, ni en -1, ni en 0, ni en 1, ni en 2 (no se considera el 3 pues no está en el intervalo mencionado).

$$E(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



¿Por qué no es continua en x = -3?

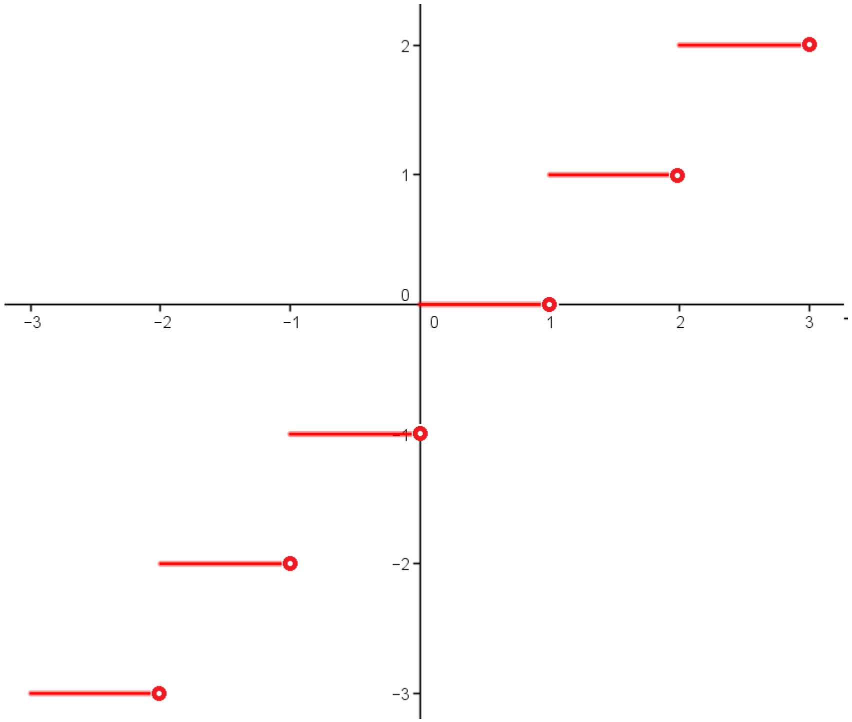
$$E(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



¿Por qué no es continua en $x = -3$?

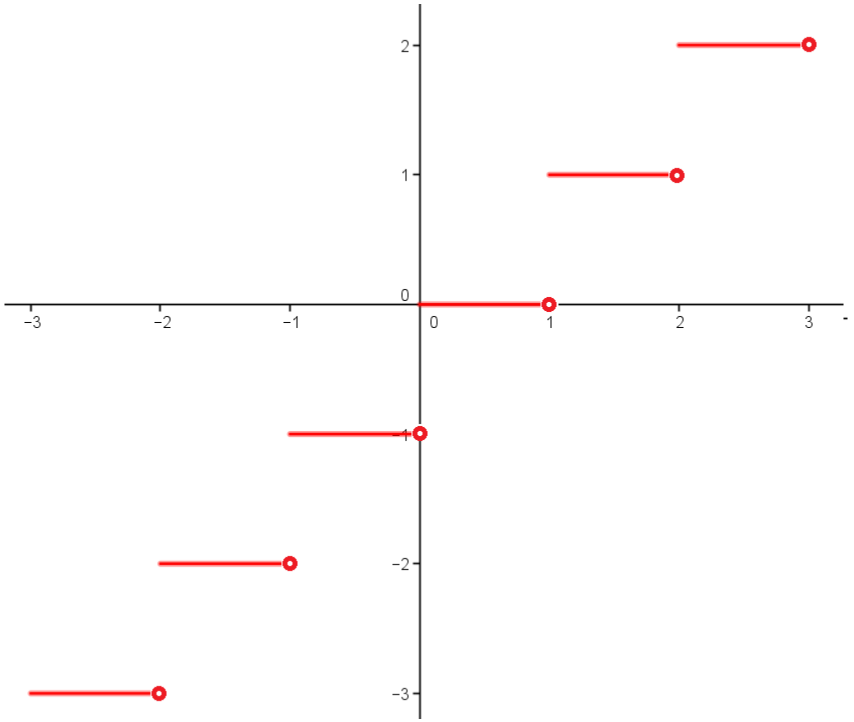
Porque la función no está definida para valores menores que -3. Por lo tanto no existe $\lim_{x \to -3^-} E(x)$.

$$E(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -3 \le x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \le x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \le x < 3 \end{cases}$$



¿Por qué no es continua en los otros puntos?

$$E(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



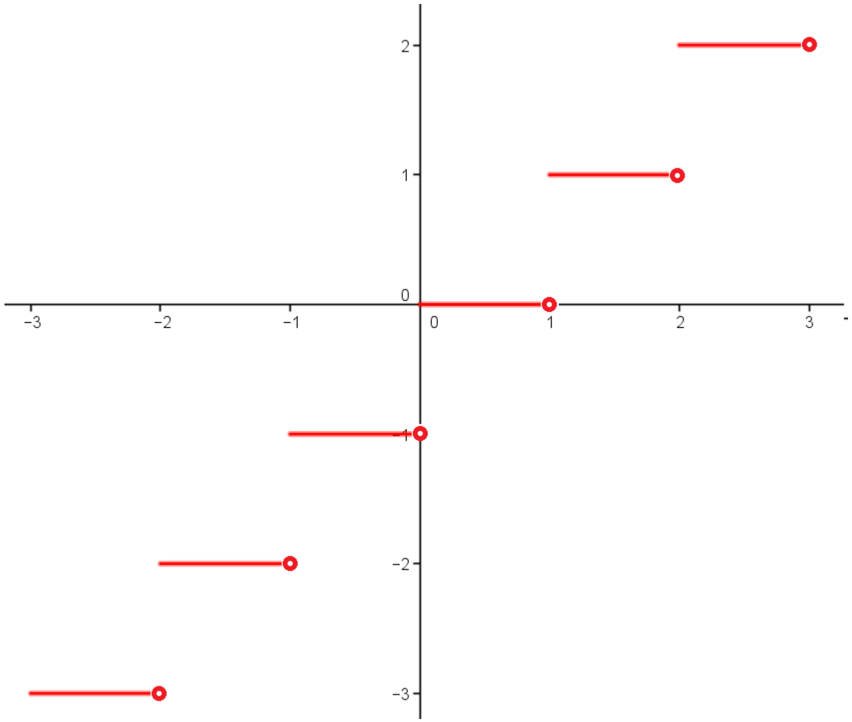
¿Por qué no es continua en los otros puntos?

En cada uno de ellos, los límites laterales (por izquierda y por derecha) son distintos, por lo tanto no existe el límite.

Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 2^-} E(x) = 1 \quad y \quad \lim_{x \to 2^+} E(x) = 2$$

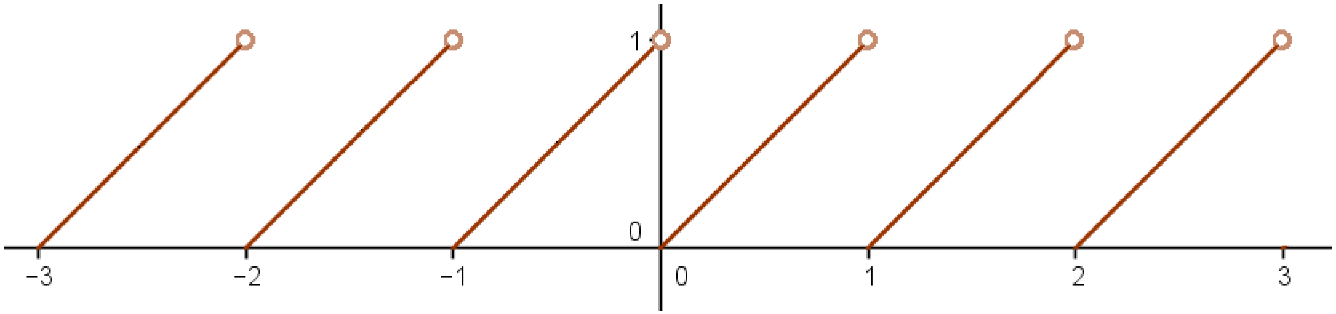
$$E(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -3 \le x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \le x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \le x < 3 \end{cases}$$



Consideremos la función $g(x) = x - E(x)$ con $x \in [-3, 3)$.

Este caso es igual al anterior.

$$g(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ x - 2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

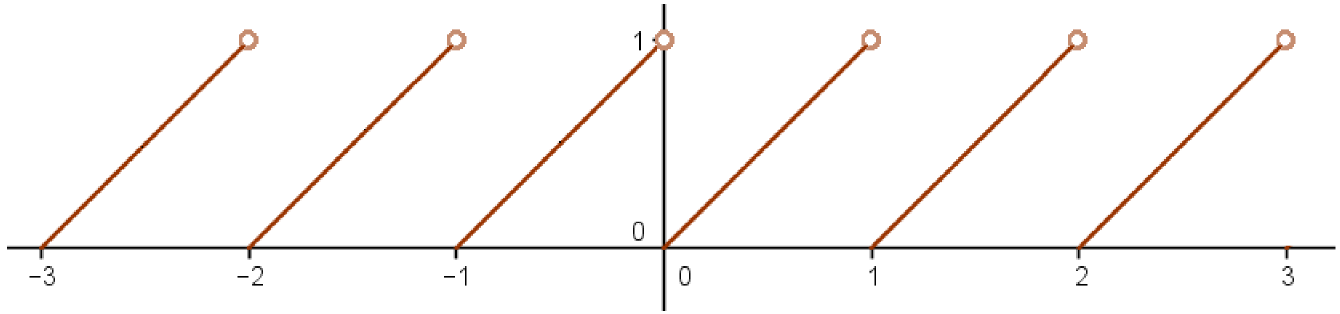


Consideremos la función $g(x) = x - E(x)$ con $x \in [-3, 3)$.

Este caso es igual al anterior. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 1 \text{ y } \lim_{x \to 2^+} g(x) = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ x - 2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

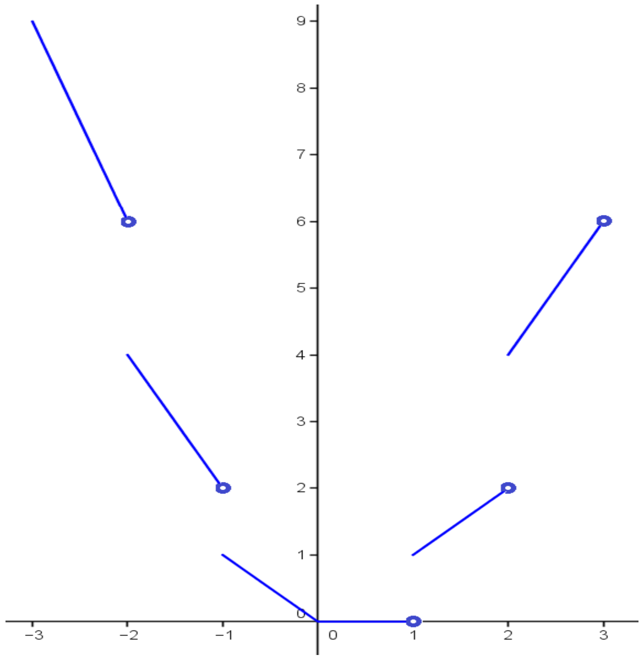


CONTINUIDAD.

Consideremos la función $f(x) = x \cdot E(x)$ con $x \in [-3, 3)$.

¿Qué diferencia hay con respecto a los casos anteriores?

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2x & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

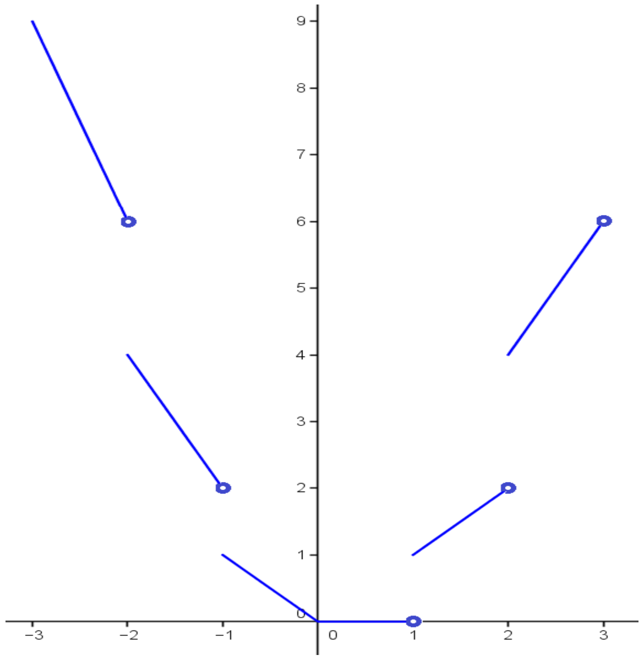


Consideremos la función $f(x) = x \cdot E(x)$ con $x \in [-3, 3)$.

¿Qué diferencia hay con respecto a los casos anteriores?

Esta función es continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } -3 \le x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 \le x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 2x & \text{si } 2 \le x < 3 \end{cases}$$



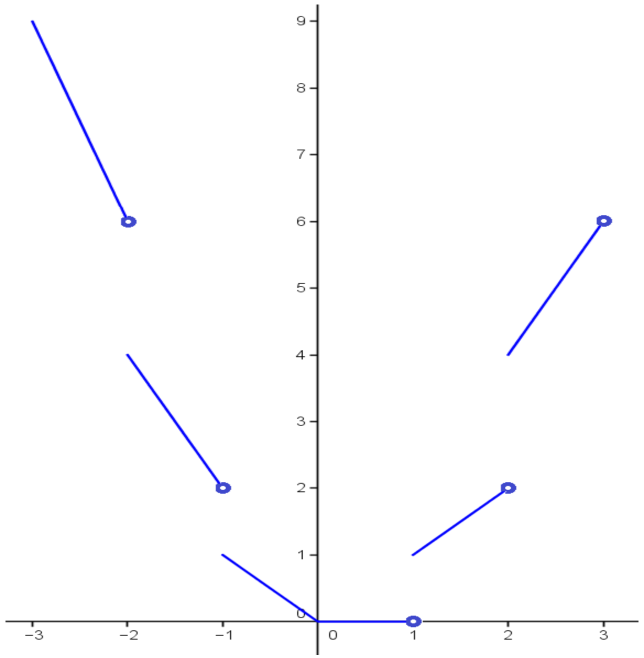
Consideremos la función $f(x) = x \cdot E(x)$ con $x \in [-3, 3)$.

¿Qué diferencia hay con respecto a los casos anteriores?

Esta función es continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

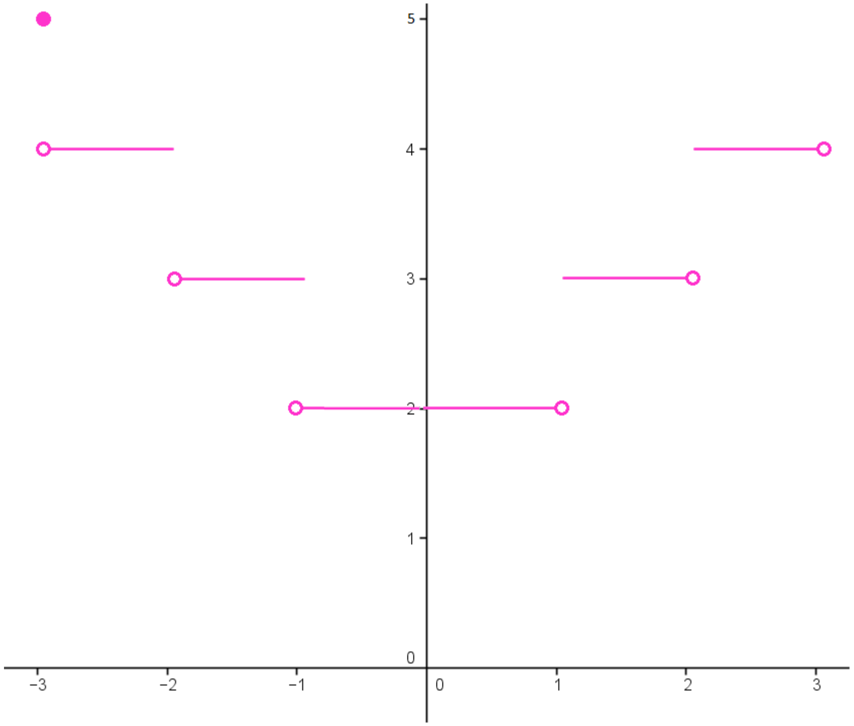
$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2x & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



Consideremos la función $k(x) = E(|x| + 2)$ con $x \in [-3, 3)$.

Este caso es igual al anterior.

$$k(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = -3 \\ 4 & \text{si } -3 < x \leq -2 \\ 3 & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

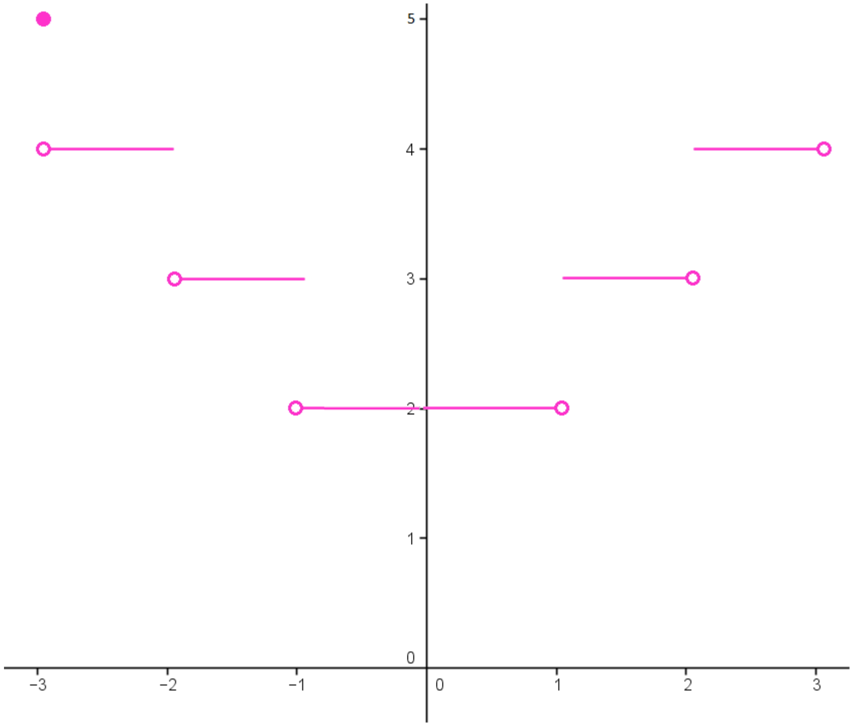


Consideremos la función $k(x) = E(|x| + 2)$ con $x \in [-3, 3)$.

Este caso es igual al anterior:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$$

$$k(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = -3 \\ 4 & \text{si } -3 < x \leq -2 \\ 3 & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



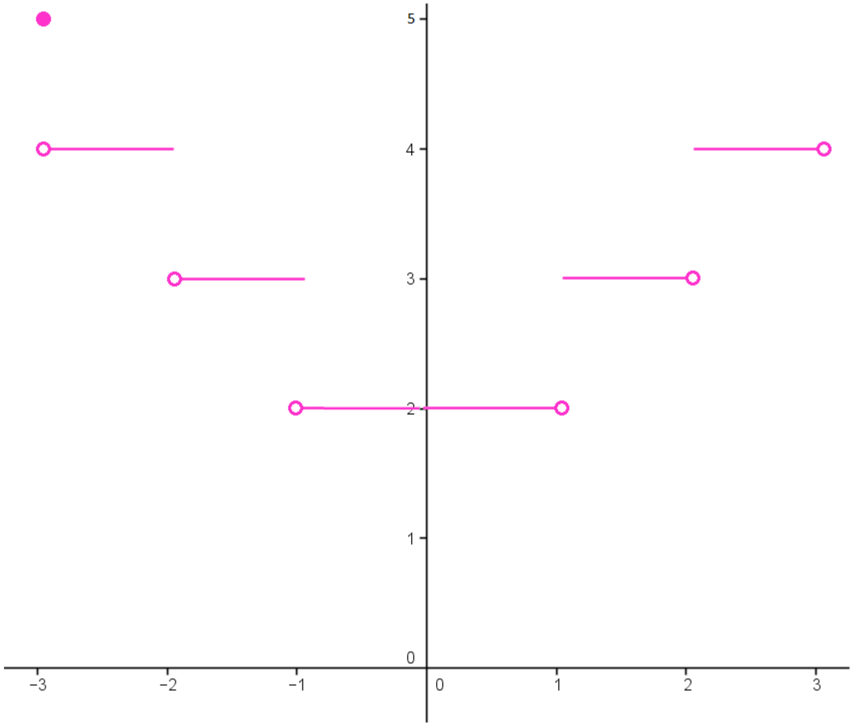
CONTINUIDAD.

Consideremos la función $k(x) = E(|x| + 2)$ con $x \in [-3, 3)$.

Este caso es igual al anterior:

$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ La función es continua en $x = 0$.

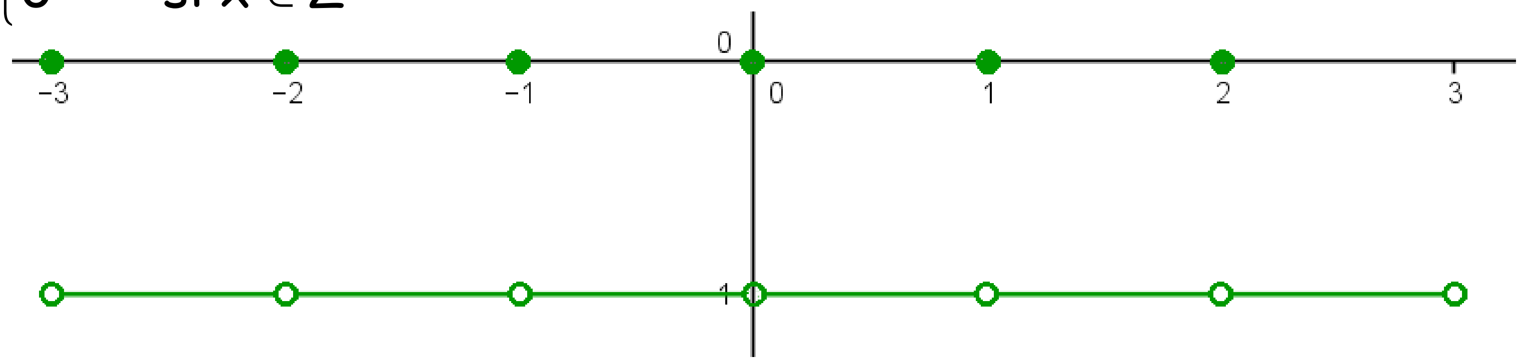
$$k(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = -3 \\ 4 & \text{si } -3 < x \leq -2 \\ 3 & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



Consideremos la función $h(x) = E(x) + E(-x)$ con $x \in [-3, 3)$.

Esta función también es discontinua en -3, en -2, en -1, en 0, en 1, en 2.

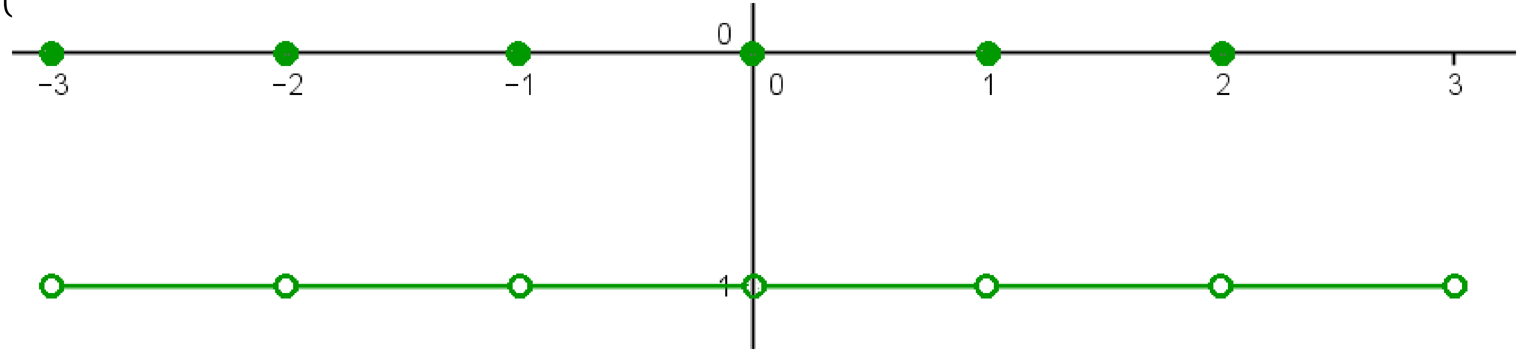
$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \notin Z \\ 0 & \text{si } x \in Z \end{cases}$$



Consideremos la función $h(x) = E(x) + E(-x)$ con $x \in [-3, 3)$.

Esta función también es discontinua en -3, en -2, en -1, en 0, en 1, en 2.
Pero la razón es distinta pues en este caso existe el límite (salvo en $x = -3$).

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \notin Z \\ 0 & \text{si } x \in Z \end{cases}$$

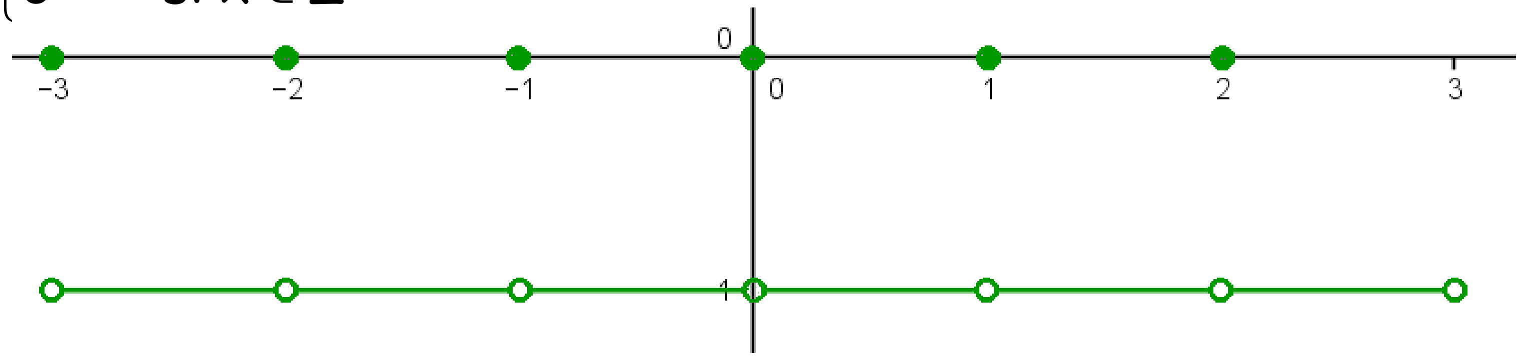


Consideremos la función h(x) = E(x) + E(-x) con $x \in [-3, 3)$.

Esta función también es discontinua en -3, en -2, en -1, en 0, en 1, en 2.
Pero la razón es distinta pues en este caso existe el límite (salvo en x = -3).
Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} h(x) = -1$$

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \notin Z \\ 0 & \text{si } x \in Z \end{cases}$$



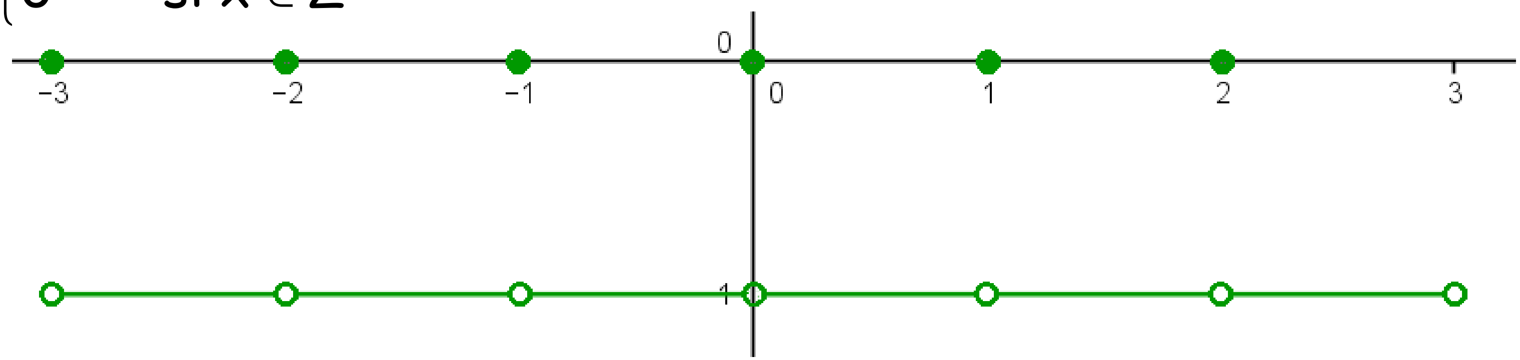
CONTINUIDAD.

Consideremos la función $h(x) = E(x) + E(-x)$ con $x \in [-3, 3)$.

Esta función también es discontinua en -3, en -2, en -1, en 0, en 1, en 2.
Pero la razón es distinta pues en este caso existe el límite (salvo en $x = -3$).
Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} h(x) = -1 \text{ sin embargo } h(2) = 0$$

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \notin Z \\ 0 & \text{si } x \in Z \end{cases}$$



CONTINUIDAD.

Consideremos la función $h(x) = E(x) + E(-x)$ con $x \in [-3, 3)$.

Esta función también es discontinua en -3, en -2, en -1, en 0, en 1, en 2.
Pero la razón es distinta pues en este caso existe el límite (salvo en $x = -3$).
Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} h(x) = -1 \text{ sin embargo } h(2) = 0$$

Por lo tanto la función no es continua en $x = 2$ pues:

$$\lim_{x \to 2} h(x) \neq h(2)$$

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \notin Z \\ 0 & \text{si } x \in Z \end{cases}$$