Definición intuitiva de límite:

Decir que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ significa que cuando **x** está cerca de **a**, pero difiere de **a**, **f(x)** está cerca de **L**.

Se tiene que estudiar y formalizar lo que significa "cerca", para eso estudiaremos *Entornos*.

Definición de Entorno:

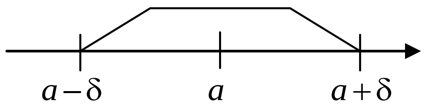
Dado un número Real **a** y un número Real δ positivo, llamaremos entorno de centro **a** y radio δ y lo notaremos $E(a,\delta)$ al conjunto de todos los números reales cuya distancia al real **a** es menor que δ.

$E(a,\delta)=\{x; x\in\mathbb{R} / d(a,x)<\delta\}$ Como la $d(a,x)=|x-a| \Rightarrow E(a,\delta)=\{x; x\in\mathbb{R} / |x-a|<\delta\}$

Como $|x-a|<\delta$ *se puede escribir como* $a-\delta<x<a+\delta$ *entonces* $\boxed{E(a,\delta)=\{x; x\in\mathbb{R} / a-\delta<x<a+\delta\}}$

Representación gráfica del $E(a,\delta)$

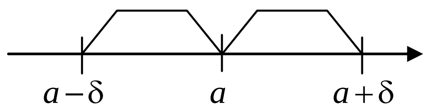
(los extremos del entorno no pertenecen a él)



Definición de Entorno Reducido:

Dado un número Real **a** y un número Real δ positivo, llamaremos entorno reducido de centro **a** y radio δ y lo notaremos $E^*(a,\delta)$ al entorno de centro **a** y radio excluyendo a su centro **a.**

$E^*(a,\delta)=\{x; x\in\mathbb{R} / a-\delta<x<a+\delta,\ x\neq a\}$

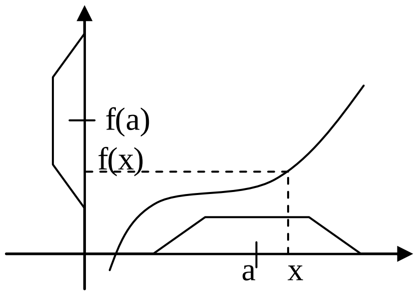


Definición de Continuidad

Una función f se dice continua en **a** si dado cualquier entorno de centro **f(a),** por pequeño que sea, siempre se puede encontrar un entorno de centro **a** tal que para todos los x pertenecientes a dicho entorno, sus correspondientes **f(x)** pertenecen al entorno de centro **f(a).**

Los entornos quedan determinados: $E(f(a),\varepsilon)$ *y* $E(a,\delta)$ (ε *y* δ son los radios)

El real ε >0 nos indica lo cerca que queremos que esté **f(x)** de **f(a)** y el real δ >0, nos indica lo próximo que debe estar **x** de **a**.



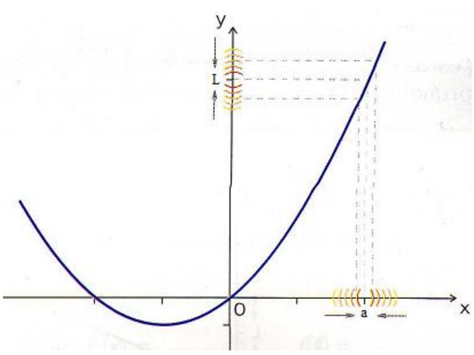
f es continua en **a** si: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0 / si\ \ x\in E(a,\delta)\Rightarrow f(x)\in E(f(a),\varepsilon)$

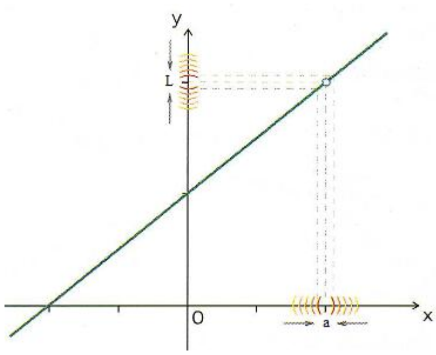
Definición de límite.

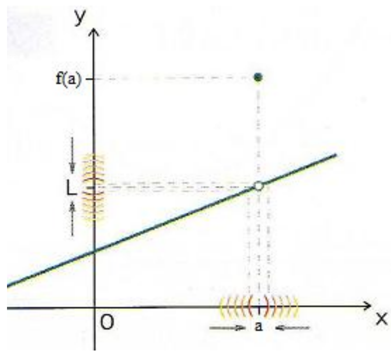
Se dice que el límite de **f(x)** es **L** para todo **x** tendiendo al valor **a** $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\right)$ si para todo entorno de centro **L**, existe un entorno reducido de centro **a**, incluido en su dominio, tal que: si **x** pertenece a este entorno reducido, los correspondientes valores funcionales pertenecen al entorno de centro L.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0 / \ si\quad x\in E^*(a,\delta)\Rightarrow f(x)\in\ E^*(L,\varepsilon)$

Observemos que la función no tiene por qué estar definida en **a** para tener límite en ese punto, incluso aunque esté definida no es necesario que sea igual al límite. No obstante si **f(x)** está definida en **a** y **f(a) = L** entonces se dice que la función es continua en **a**.







Relación entre continuidad y Límite

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que una función sea continua en **a** es que exista $\lim_{x\to a} f(x)$ y además que sea igual a **f(a)**

$$\boxed{f \;\; es \;\; continua \; en \; a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Propiedades de los límites:
Si existe el límite de una función en un punto, es único y es igual a los límites laterales.
Si una función tiene limite distinto de cero en un punto, entonces existe un entorno del punto en el que los valores que toma f tienen el mismo signo que el límite.

Operaciones con Límites - Relaciones de Continuidad.

Suma: $\left.\begin{matrix} \lim_{x\to a} f(x) = L \\ \lim_{x\to a} g(x) = M \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(f+g\right)(x) = L+M$

Si f y g son continuas en **a** $\Rightarrow \left(f+g\right)$ es continua en **a**.

Producto: $\left.\begin{matrix} \lim_{x\to a} f(x) = L \\ \lim_{x\to a} g(x) = M \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(f\cdot g\right)(x) = L\cdot M$

Si f y g son continuas en **a** $\Rightarrow \left(f\cdot g\right)$ es continua en **a**.

Cociente: $\left.\begin{matrix} \lim_{x\to a} f(x) = L \\ \lim_{x\to a} g(x) = M, \; M \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$

Si f y g son continuas en **a,** y además $g(a) \neq 0 \;\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)$ es continua en **a**.

Otras operaciones:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \quad k\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to a} k.f(x) = k.L \qquad\qquad \lim_{x\to a} f(x) = L, \quad n\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = \left(L\right)^n$$

$$\lim_{x\to a} g\left(f(x)\right) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

Tipos de discontinuidades:

Discontinuidad evitable: Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero:
1) No existe f(a)
2) Existe f(a) pero f(a) ≠ $\lim_{x\to a} f(x)$

Discontinuidad inevitable: No existe $\lim_{x\to a} f(x)$
1) Los límites laterales existen pero no son iguales: (1ª especie)
2) Alguno de los límites laterales no existe (2ª especie)

Teoremas relevantes:

Teorema: Si una función admite derivada finita en un punto **a**, entonces es continua en ese punto.
DERIVABLE ⇒ CONTINUA. Lo contrario no tiene por qué ser cierto.

Teorema de los ceros, de Bolzano.-
Sea f:[a,b]-->R una función continua en [a,b], tal que **f** toma valores de signos distintos en los extremos **a** y **b** del intervalo, es decir, sign f(a) ≠ sign f(b). Entonces existe **c** ∈ (a,b) tal que f(c)=0.

Teorema de los valores intermedios, de Darboux.-
Sea f continua en el intervalo cerrado [a,b], $f(a) < \lambda < f(b)$ entonces existe al menos un **c** de (a,b) tal que $f(c) = \lambda$.
Otra forma**: f** toma todos los valores intermedios comprendidos entre f(a) y f(b).

Teorema de los extremos absolutos (del supremo y el ínfimo), de Weiestrass.-
Si f es una función continua en el intervalo [a,b], entonces **f** alcanza al menos una vez el máximo y el mínimo absolutos en dicho intervalo.