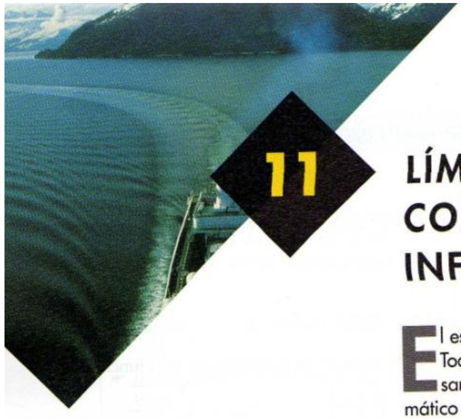


11 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

El estado de reposo (inmovilidad) es desconocido en la naturaleza. Todo se mueve, todo cambia. El **límite de funciones** estudia, precisamente, los procesos de cambio. La idea de su tratamiento matemático es la siguiente: en ciertas situaciones no es posible obtener directamente el valor exacto de una magnitud; entonces, se obtienen sucesivas aproximaciones de ella. Esta cadena de aproximaciones, cada vez más precisas, permite determinar inequívocamente el valor buscado. (Es el estudio del proceso de aproximación el que nos proporciona, mediante su límite, el valor exacto).

El método matemático de paso al límite fue el fruto de la persistente labor de muchas generaciones sobre problemas que no podían resolverse por los sencillos métodos de la aritmética, el álgebra o la geometría elemental.

La humanidad llega a la idea de **continuidad** mediante la observación de procesos físicos. El concepto se va perfilando y se hace matemáticamente relevante al estudiar funciones que no son continuas en algunos de sus puntos. La descripción precisa de función continua requiere del proceso de paso al límite.

Los conceptos de límite y continuidad recibieron una formulación precisa al comienzo del siglo XIX (Cauchy) y están estrechamente ligados al de número real.

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

El valor de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$ para $x = 5$ no se puede obtener directamente porque el denominador se hace cero. Lo obtendremos por aproximaciones sucesivas, dando a x los valores 4; 4,9; 4,99; …

- Comprueba que:
  $f(4) = 6{,}5$; $f(4{,}9) = 6{,}95$; $f(4{,}99) = 6{,}995$
- Calcula $f(4{,}999)$; $f(4{,}9999)$; $f(4{,}99999)$; …
- ¿Te parece razonable afirmar que, cuando x se aproxima a 5, el valor de $f(x)$ se aproxima a 7? Lo expresamos así: $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 7$
- Calcula, análogamente, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 6x - 27}{2x - 6}$.

Problema 1

Representa gráficamente las siguientes funciones y di, de cada una de ellas, si es continua o discontinua:

a) $y = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 1 \\ 5 - x^2 & x \ge 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 4 & x < 0 \\ 4 - x & 0 \le x \le 5 \\ 2x - 11 & x > 5 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} \sqrt{x + 3} & x < 1 \\ 2/x & x \ge 1 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 2x & 0 \le x < 3 \\ x + 2 & x \ge 3 \end{cases}$

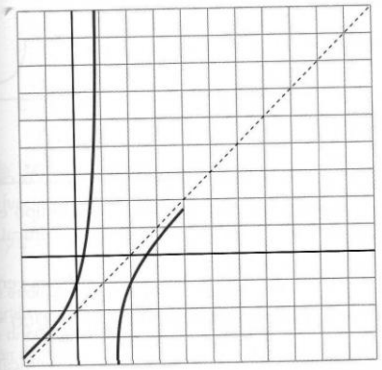
Problema 2

Vamos a comprobar que la gráfica de la función

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$$

se aproxima a la recta de ecuación $y = x - 2$.

- Completa en tu cuaderno esta representación, obteniendo los valores de $f(x)$ para los siguientes valores de x: 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11



Observa que la gráfica de la curva $y = f(x)$ se aproxima a la de la recta cada vez más. Por ello, a dicha recta se le llama **asíntota** de la curva.

Comprueba para valores *muy grandes* de x que la diferencia entre curva y recta llega a ser *muy pequeña*.

x	50	100	1 000
$y = f(x)$			
$y = x - 2$			
DIFERENCIA			

De este modo se comprueba que la recta $y = x - 2$ es asíntota de la función

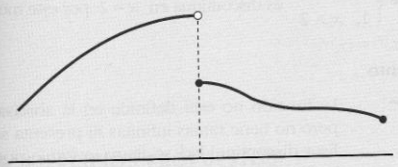
$$y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$$

- Comprueba, mediante pasos similares a los anteriores, que la función
  $$y = \frac{x^3}{x^2 - 2x}$$
  tiene por asíntota a la recta de ecuación:
  $$y = x + 2$$

EN ESTA UNIDAD VERÁS

- La idea gráfica de **función continua** es muy sencilla.

  A partir de ella elaboraremos criterios para dilucidar si una función dada por su expresión analítica es o no continua en un punto.



  ¿Qué peculiaridades tienen las expresiones analíticas de las funciones continuas?

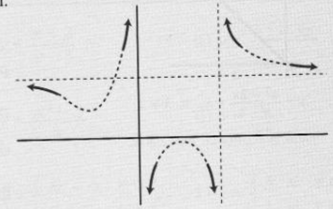
- La noción y el cálculo de **límites** es fundamental tanto para el estudio de la continuidad de funciones como para la obtención de sus **ramas infinitas**, lo cual es de gran ayuda para la representación de su gráfica.

- Aprenderemos a calcular límites y a obtener ramas infinitas, especialmente en dos grandes familias de funciones:

  — Las polinómicas, como
  $$y = 2x^3 - 5x^2 + x - 2$$

  — Las racionales, como $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$.

  y en estas últimas descubriremos que el conocimiento de sus ramas infinitas nos permitirá, en casi todos los casos, obtener una idea muy clara de cómo es la representación gráfica de la función.

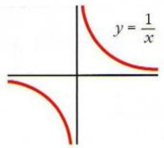


La idea de función continua es la de que "puede ser construida con un solo trazo". Vamos a obtener algunos criterios mediante los cuales podamos saber si una función, dada por su expresión analítica, es o no continua.

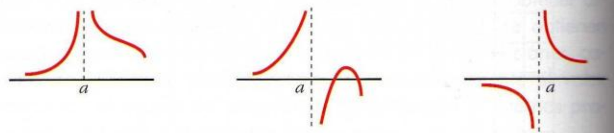
Discontinuidades

Empecemos observando *razones por las que una curva puede no ser continua en un punto.*

1. Tiene ramas infinitas en ese punto

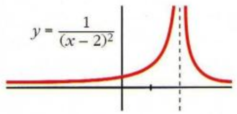


ASÍNTOTA VERTICAL EN $x = 0$



En estos casos, la recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva.

La función $y = 1/x$ presenta una discontinuidad de este tipo en la abscisa 0. Es decir, la recta $x = 0$ (el eje Y) es asíntota vertical.

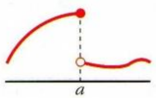


ASÍNTOTA VERTICAL EN $x = 2$

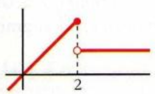
Análogamente, las funciones $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tienen una asíntota vertical en los valores de x para los cuales el denominador es 0 ($Q(x) = 0$).

Por ejemplo, la función $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$. En ella, las dos ramas van hacia arriba.

2. Presenta un salto en ese punto



La función da un salto al llegar a la abscisa a. Entre las funciones elementales que nosotros manejamos, tal comportamiento solo se encuentra en funciones definidas "a trozos".

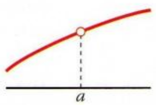


$$y = \begin{cases} x, & \text{si } x \le 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

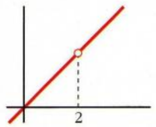
SALTO EN $x = 2$

Por ejemplo, $y = \begin{cases} x, & x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ es discontinua en $x = 2$ por este motivo.

3. Le falta ese punto



La función no está definida en la abscisa a, pero no tiene ramas infinitas ni presenta salto. Esta discontinuidad se llama *evitable* porque bastaría añadir ese punto para que la función fuera continua.

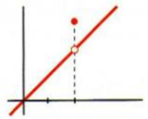


$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = x, \text{ si } x \neq 2$$

FALTA EL PUNTO DE ABSCISA 2

Por ejemplo, la función $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$ no está definida en $x = 2$, porque el denominador se anula. Sin embargo, para valores distintos de 2 podríamos simplificar la expresión: $y = \dfrac{x(x-2)}{x-2} = x$, si $x \neq 2$.

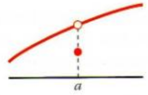
Es decir, la gráfica de esta función es como la de $y = x$, salvo que le falta el punto de abscisa 2.



$$y = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

PUNTO DE ABSCISA 2 DESPLAZADO

4. Tiene ese punto "desplazado"



Este caso es como el anterior, pero la función sí está definida en $x = a$, aunque el punto lo tiene desplazado. También este tipo de discontinuidad se llama *evitable.*

Este tipo de comportamiento solo puede conseguirse mediante funciones definidas "a trozos".

Por ejemplo, la función $y = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ presenta una discontinuidad de este tipo en el punto de abscisa 2.

TEN EN CUENTA

Las funciones

$$y = \frac{1}{x}; \quad y = \frac{1}{(x-2)^2}; \quad y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

que están definidas de forma "natural" (sin el artificio de la definición "a trozos"), solo son discontinuas en los puntos donde no están definidas.

Continuidad

Como resulta obvio, una función es continua en un punto si no presenta ningún tipo de discontinuidad en él.

Es interesante observar que los ejemplos de funciones con discontinuidades de los tipos **1** y **3**, que son las únicas que se han podido definir de forma "natural", no están definidas en el punto en que son discontinuas. Esto es general y nos va a permitir dar un criterio, tan eficaz como sencillo, para identificar continuidades:

> Las funciones definidas por expresiones analíticas elementales (es decir, todas las que conocemos hasta ahora), son continuas en todos los puntos en los que están definidas.

Por ejemplo, $f(x) = x^3 - 3x + 5$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

$g(x) = \dfrac{x+5}{x+3}$ es continua en todos los puntos, salvo en $x = -3$, donde no está definida.

$h(x) = \sqrt{x-4}$ es continua en $[4, +\infty)$, que es donde está definida.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Explica por qué la función $y = x^2 - 5$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

2. Explica por qué la función $y = \sqrt{5 - x}$ es continua en $(-\infty, 5]$.

3. Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:

a) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ b) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$

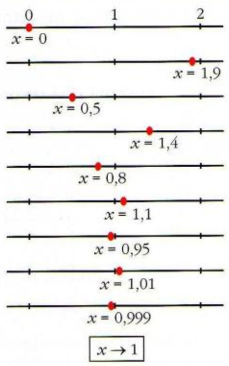
c) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x}$ d) $y = \dfrac{1}{x^2}$

e) $y = \begin{cases} 3x - 4, & x < 3 \\ x + 1, & x \ge 3 \end{cases}$ f) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

11.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

El estudio de la continuidad en un punto y de las asíntotas verticales se realiza con más precisión conociendo el concepto de límite. Empecemos por entender qué significa que x se acerca a un cierto valor numérico:

X TIENDE A 1



> $x \to c$ significa que x toma valores cada vez más próximos a c. Se lee "x **tiende a** c".

Por ejemplo: 0; 1,9; 0,5; 1,4; 0,8; 1,1; 0,95; 1,01; 0,999;... es una secuencia de números cada vez más próximos a 1. Escribimos: $x \to 1$

> $x \to c^-$ (x **tiende a** c **por la izquierda**) significa que x toma valores cada vez más próximos a c, pero menores que c.

Por ejemplo, la secuencia 0; 0,5; 0,9; 0,95; 0,99;... está formada por números menores que 1 y cada vez más próximos a 1. Escribimos: $x \to 1^-$

> $x \to c^+$ (x **tiende a** c **por la derecha**) significa que x toma valores cada vez más próximos a c, pero mayores que c.

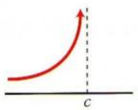
Si x toma los valores 2; 1,5; 1,1; 1,01; 1,001;... escribiremos: $x \to 1^+$

Significado de $\lim f(x)$ cuando $x \to c^-$

Si $x \to c^-$, entonces x toma valores variables. Como consecuencia, $f(x)$ también toma valores variables. El comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to c^-$, se expresa así:

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ (*límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda*).

$\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty}$



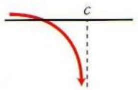
$\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty}$ Cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez más grandes, llegando a superar a cualquier valor, por grande que sea.

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

x	0	0,9	0,99	...
$f(x)$	1	100	10 000	...

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty}$



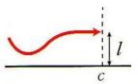
$\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty}$ Cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez "más negativos".

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

x	0	0,9	0,99	...
$f(x)$	−1	−10	−100	...

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = l}$



$\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = l}$ Cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez más próximos al número l.

Ejemplo: $f(x) = x^2 + 5$

x	0	0,9	0,99	...
$f(x)$	5	5,81	5,9801	...

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 6$

Las funciones que nosotros conocemos hasta ahora tienen uno de estos tres comportamientos cuando $x \to c^-$.

CON CALCULADORA

Comprueba que

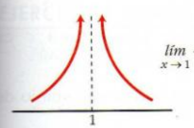
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

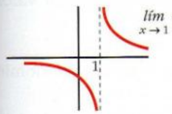
$$\lim_{x \to 1^+} (x^2 + 5) = 6$$

dando a x los valores

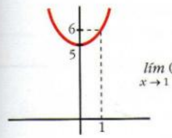
2; 1,5; 1,1; 1,01; 1,001; 1,0001...



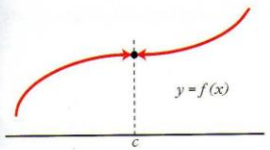
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$



$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ no existe



$\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 5) = 6$



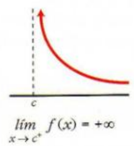
$y = f(x)$ es continua en c

⇕

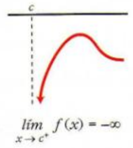
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Significado de $\lim f(x)$ cuando $x \to c^+$

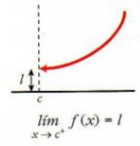
El significado de $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ (*límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la derecha*) es similar al del $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$. Veamos gráficamente los tres comportamientos que pueden darse, idénticos a los vistos para $x \to c^-$.



$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$



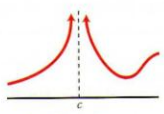
$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = l$

Los límites cuando $x \to c^-$ y $x \to c^+$ se llaman **límites laterales**.

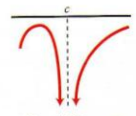
Significado de $\lim f(x)$ cuando $x \to c$

$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ (*límite de $f(x)$ cuando x tiende a c*) es el comportamiento de la función cuando x se aproxima a c, sin importar si es por la derecha o por la izquierda.

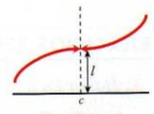
> Si $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = l$, decimos que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$.
>
> Análogamente, cuando los dos límites laterales son $+\infty$ o $-\infty$.
>
> Si los dos límites laterales no toman el mismo valor, se dice que **no existe** el $\lim\limits_{x \to c} f(x)$.



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$

Relación de la continuidad en c con el límite cuando $x \to c$

Observando los distintos tipos de discontinuidad y el comportamiento de las funciones continuas, llegamos a la siguiente conclusión:

> ***f* es continua en $x = c$** si cumple las tres siguientes condiciones:
>
> - Tiene límite finito cuando $x \to c$ .... $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$
> - Está definida en $x = c$ .... $f(c)$ existe
> - El límite coincide con el valor de la función en c... $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$
>
> Observa que la igualdad final resume las tres condiciones, pues si se da la igualdad es porque existen los dos miembros de esta.

11.3 CÁLCULO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

El cálculo de límites de funciones en puntos concretos puede ser muy fácil o difícil, según los casos. Vamos a analizar distintas situaciones que nos permitirán reconocer qué proceso conviene seguir en cada caso.

Límite en un punto en el que la función es continua

Recordemos unos resultados que nos van a simplificar extraordinariamente el cálculo de algunos límites:

Si $f(x)$ es continua en c, entonces:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Las funciones que utilizamos habitualmente mediante su expresión analítica son continuas en todos los puntos en los que están definidas.

POR TANTO

Si $f(x)$ es una función habitual dada por su expresión analítica y existe $f(c)$, entonces para hallar:

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

calcularemos, sencillamente:

$$f(c)$$

OBSERVACIÓN

Cuando ponemos $x \to c$ hace falta que podamos "acercarnos a c cada vez más". Por ejemplo:

- Carece de sentido hablar de $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{x}$ porque, al ser el dominio de definición de $\sqrt{x}$ el conjunto $[0, \infty)$, la x no puede tomar valores "cada vez más próximos a -3".
- Sí podemos hablar de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x^2}{x^2}$ aunque 0 no sea del dominio de definición de esta función, $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, porque podemos tomar puntos de D tan próximos a 0 como queramos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar los límites siguientes:*

a) $\lim\limits_{x \to 3} x^2$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x}{x-5}$

c) $\lim\limits_{x \to 7} \sqrt{3x+4}$

d) $\lim\limits_{x \to \pi/4} (\text{sen}\, x + 3)$

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2) = 3^2 = 9$, pues $f(x) = x^2$ es continua en $x = 3$.

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x}{x-5} = \dfrac{5 \cdot 2}{2-5} = \dfrac{10}{-3} = -\dfrac{10}{3}$

Como dicha función está definida en $x = 2$, es continua en $x = 2$ y, entonces, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ coincide con el valor de la función, $f(2)$.

c) $\lim\limits_{x \to 7} \sqrt{3x+4} = \sqrt{3 \cdot 7 + 4} = 5$

d) $\lim\limits_{x \to \pi/4} (\text{sen}\, x + 3) = \text{sen}\, \dfrac{\pi}{4} + 3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 3$ (pues $y = \text{sen}\, x + 3$ es una función continua).

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$

2. Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ b) $\lim\limits_{x \to 0,1} \log_{10} x$

Cálculo de límites de funciones definidas "a trozos"

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < c \\ f_2(x), & x \ge c \end{cases}, \quad f_1 \text{ y } f_2 \text{ son funciones continuas en } c.$$

- **Cálculo de $\lim f(x)$ en el punto de ruptura**

Como f_1 y f_2 son continuas, $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f_1(c)$ y $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f_2(c)$.

Para hallar $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ calcularemos $f_1(c)$ y $f_2(c)$. Si coinciden, este es el valor del límite. Si no coinciden, el límite no existe.

- **Cálculo de $\lim f(x)$ en otro punto cualquiera del dominio**

Para hallar $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $a \ne c$, procedemos así:

Si $a < c$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f_1(a)$ Si $a > c$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f_2(a)$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar los límites de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x < 3 \\ -x + 7, & x \ge 3 \end{cases}$$

en los puntos 3, 1 y 7.

- Veamos si coinciden los límites por la derecha y por la izquierda de 3:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} f(x) &= 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) &= -3 + 7 = 4 \end{aligned}\right\} \text{No coinciden. Por tanto, no existe } \lim_{x \to 3} f(x).$$

Como consecuencia, $f(x)$ no es continua en $x = 3$.

- Como $1 < 3$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x - 5) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$
- Como $7 > 3$, $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = \lim\limits_{x \to 7} (-x + 7) = -7 + 7 = 0$

2. *Averiguar si la función*

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 3, & x \ne -2 \\ 0, & x = -2 \end{cases}$$

es continua en $x = -2$.

Calcularemos $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$ y, si existe, compararemos su valor con $g(-2)$.

$$\lim_{x \to -2} g(x) = \lim_{x \to -2} (x^3 - 5x + 3) = (-2)^3 - 5(-2) + 3 = 5 \ne g(-2)$$

Por tanto, la función no es continua en $x = -2$.

3. *Calcular el valor de n para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, & x \le 4 \\ 2x + n, & x > 4 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Cualquiera que sea n, $f(x)$ es continua en los puntos distintos de 4.

Puesto que $f(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 1 = -3$, ha de ser $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -3$.

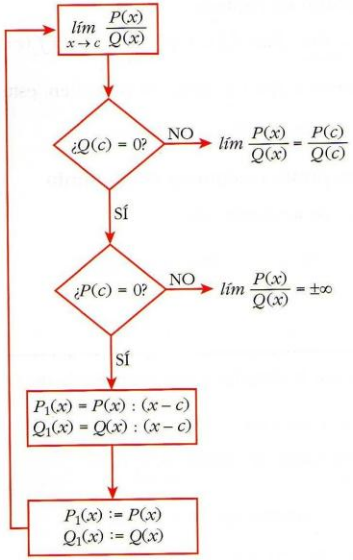
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 4^-} f(x) &= 4^2 - 5 \cdot 4 + 1 = -3 \\ \lim_{x \to 4^+} f(x) &= 2 \cdot 4 + n = 8 + n \end{aligned}\right\} 8 + n = -3 \Rightarrow n = -11$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Calcula k para que la función $y = f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \ne 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

Límite del cociente de dos polinomios, $P(x)/Q(x)$



La expresión := significa "se pone en lugar de".

- Si **el denominador no se anula**, $Q(c) \neq 0$, la función es continua en c y, por tanto, el límite en c es el valor de la función en c.

Si $Q(c) \neq 0$, $\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$

- Si **el denominador se anula y el numerador no se anula**, el límite es infinito.

Si $P(c) \neq 0$ y $Q(c) = 0$, entonces $\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

En estos casos hay que estudiar los dos límites laterales. Este estudio puede hacerse con ayuda de la calculadora hallando el signo de $P(x)/Q(x)$ en puntos muy próximos a c, a ambos lados de él. Por ejemplo, en $c - 0{,}01$ y en $c + 0{,}01$.

- Si **tanto el numerador como el denominador se anulan**, entonces la expresión puede simplificarse.

Si $P(c) = 0$, $Q(c) = 0$, entonces el cociente puede simplificarse dividiendo numerador y denominador por $(x - c)$:

$$P(x) = (x - c) \cdot P_1(x) \qquad Q(x) = (x - c) \cdot Q_1(x)$$

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to c} \frac{(x - c) \cdot P_1(x)}{(x - c) \cdot Q_1(x)} = \lim_{x \to c} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Para hallar este nuevo límite, analizaremos en cuál de los tres casos se encuentra.

EJERCICIOS RESUELTOS

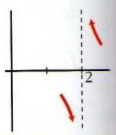
1. *Calcular el límite siguiente:*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 1}{x - 2}$$

Puesto que para $x = 2$ se anula el denominador pero no el numerador, el límite es $\pm\infty$. Estudiemos los límites por la izquierda y por la derecha del punto 2 para analizar sus signos:

IZDA: $2 - 0{,}01 = 1{,}99$; $\frac{1{,}99 + 1}{1{,}99 - 2} = -299 < 0$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

DCHA: $2 + 0{,}01 = 2{,}01$; $\frac{2{,}01 + 1}{2{,}01 - 2} = 301 > 0$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

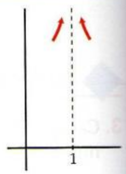


2. *Calcular el límite siguiente:*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{(x - 1)^2}$$

Puesto que para $x = 1$ se anula el denominador y no el numerador, el límite es $\pm\infty$. Pero, además, tanto el numerador como el denominador son positivos en las proximidades del punto $x = 1$.

Por tanto, $\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{(x - 1)^2} = +\infty$



3. *Hallar el siguiente límite:*

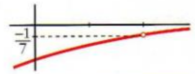
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$$

Para $x = 2$ se anulan el numerador y el denominador. Puede simplificarse la fracción dividiendo ambos por $(x - 2)$:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x + 5)(x - 2)} = \frac{x - 3}{x + 5}$$

Ya no se anula el denominador y el límite puede obtenerse sustituyendo x por 2:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{x + 5} = -\frac{1}{7}$$



4. *Calcular los límites cuando $x \to 2$ y $x \to 3$ de la siguiente función:*

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$$

$\boxed{x \to 2}$ Tanto el numerador como el denominador se anulan para $x = 2$. Por tanto, podemos simplificar la fracción:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 - 3x)}{(x - 2)(x^2 - 5x + 6)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6}$$

Ahora, para $x = 2$, observamos que se anula el denominador pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$. Veamos sus signos:

A la izquierda: $x = 2 - 0{,}01 = 1{,}99 \to \frac{1{,}99^2 - 3 \cdot 1{,}99}{1{,}99^2 - 5 \cdot 1{,}99 + 6} = \frac{-}{+} = -$

A la derecha: $x = 2 + 0{,}01 = 2{,}01 \to \frac{2{,}01^2 - 3 \cdot 2{,}01}{2{,}01^2 - 5 \cdot 2{,}01 + 6} = \frac{-}{-} = +$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$. No existe $\lim_{x \to 2} f(x)$

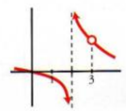
$\boxed{x \to 3}$ Tanto el numerador como el denominador se anulan para $x = 3$. Por tanto, podemos simplificar la fracción:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x^2 - 2x)}{(x - 3)(x^2 - 4x + 4)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

El denominador ya no se anula para $x = 3$.

Por tanto, para hallar el límite simplemente sustituimos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3}{3^2 - 4 \cdot 3 + 4} = 3$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

4. Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ en -2, 0 y 2

b) $f(x) = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$ en 2, 0 y 3

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ en 1 y -3

d) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 3x^2}$ en 0 y -3

11.4 COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to +\infty$

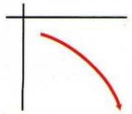
Para expresar que x toma valores cada vez más grandes, ponemos $x \to +\infty$ (x tiende a más-infinito). Por ejemplo, si x toma los valores 10, 100, 1 000, 10 000, …, decimos que $x \to +\infty$.

Veamos posibles comportamientos de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ crecen cada vez más.

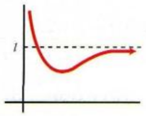
Por ejemplo, son de este tipo las funciones potencias, $y = x^n$; exponenciales, $y = a^x$, $a > 1$; raíces, $y = \sqrt[n]{x}$; logaritmos, $y = \log_a x$, $a > 1$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ son cada vez "más negativos".

Como ejemplo podríamos poner las funciones del ejemplo anterior precedidas del signo menos: $y = -x^4$, $y = -2^x$, $y = -\sqrt{x}$, $y = -\log_3 x$.

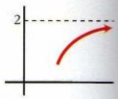


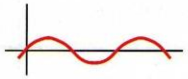
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ son cada vez más próximos a un número l. En tal caso se dice que la recta $y = l$ es una **asíntota horizontal** de la curva.

Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 5} = 2$. Veámoslo con ayuda de la calculadora:

x	10	100	1 000	10 000	…
$\dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 5}$	1,876	1,9987	1,999987	1,99999987	…





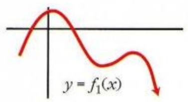
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existe.

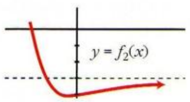
Cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ ni crecen ni decrecen indefinidamente, ni se acercan cada vez más a ningún número.

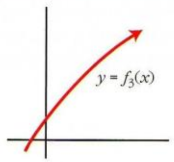
Por ejemplo, las funciones trigonométricas presentan este comportamiento, pues oscilan indefinidamente.

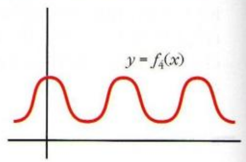
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Di el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:









11.5 CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to +\infty$

Al igual que en los límites en un punto, el cálculo de límites cuando $x \to +\infty$ presenta una variada casuística que depende del tipo de funciones que se presenten. Veamos las más importantes para este nivel.

NOTACIÓN

En lugar de decir que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

podemos decir que

"$f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$"

o bien

"$f(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$"

REFLEXIÓN IMPORTANTE

Cuando $x \to +\infty$, el protagonismo de una función polinómica lo desempeña su término de mayor grado pues, para valores grandes de x, el valor de las potencias de grado inferior es insignificante comparado con el suyo. Por ejemplo:

$$x^3 - 20x^2$$

Para $x = 100$:

$$\begin{aligned} x^3 &= 1\,000\,000 \\ -20x^2 &= -\ 200\,000 \\ \hline x^3 - 20x^2 & \quad\ \ 800\,000 \end{aligned}$$

Límites $(x \to +\infty)$ de funciones polinómicas

Las siguientes funciones, evidentemente, tienden a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$:

$f(x) = x^2 \qquad f(x) = x^4 + 17 \qquad f(x) = x - 3 \qquad f(x) = x^3 - x^2$

Acaso resulte menos evidente pero, reflexionando, también es claro que tienden a $+\infty$ las siguientes funciones:

$f(x) = 2x^2 - 40x \qquad f(x) = 3x^4 - 1\,000\,000 \qquad f(x) = x^3 - 1\,000x^2$

Se puede comprobar dando a x valores suficientemente grandes.

Si a las funciones anteriores les cambiamos el signo, tienden a $-\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} (-3x^4 + 1\,000\,000) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 1\,000x^2) = -\infty$$

En general, podemos afirmar que:

El límite cuando $x \to +\infty$ de una función polinómica es $+\infty$ o $-\infty$ según que el coeficiente del término de mayor grado sea positivo o negativo.

Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - 5x^3) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5x^3 + 7x^2 + 9) = -\infty$

Límites $(x \to +\infty)$ de funciones inversas de polinómicas

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, pues al dividir 1 por un número cada vez más grande, el cociente es cada vez más próximo a cero.

Si $P(x)$ es una función polinómica, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{P(x)} = 0$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Di el valor del límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ b) $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$ d) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ f) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$

2. Como $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, halla un valor de x para el cual sea $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$.

3. Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 10x} = 0$, halla un valor de x para el cual sea $\dfrac{1}{x^2 - 10x} < 0{,}0001$.

Límites $(x \to +\infty)$ de funciones racionales: $P(x)/Q(x)$

EJEMPLO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 300x^2 - 40}{3x^3 + 500x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4}{3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{3} = +\infty$$

Hemos visto que, cuando $x \to +\infty$, el protagonismo de una función polinómica lo desempeña el término de mayor grado.

De igual modo, en el límite cuando $x \to +\infty$ de un cociente de polinomios, solo importarán los términos de mayor grado del numerador y del denominador. Por tanto, podemos dar la siguiente regla para hallar límites $(x \to +\infty)$ de funciones racionales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a x^m + \dots}{b x^n + \dots}$$

- Si grado de P > grado de Q (es decir, $m > n$), entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ $\left(\text{el signo es el de } \frac{a}{b}\right)$.
- Si grado de P < grado de Q $(m < n)$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- Si grado de P = grado de Q $(m = n)$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a/b$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{3x - 5}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 6}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{-x^3}$

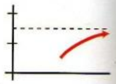
a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{3x - 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador y, además, los coeficientes de los términos de mayor grado son ambos positivos, el límite es $+\infty$.

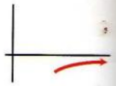
b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

El límite es 0 pues grado de $P(x)$ < grado de $Q(x)$.

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$



d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3}{-x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x} = 0$



EJERCICIOS PROPUESTOS

4. Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \frac{1}{3x}$ b) $f(x) = \frac{3}{x}$

c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = 3x - 5$

5. Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ d) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$

11.6 RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS

A lo largo de este tema nos hemos encontrado varias veces con **ramas infinitas**, es decir, tramos de curva que se alejan indefinidamente. Cuando una rama infinita se ciñe (se aproxima) a una recta, a esta se la llama **asíntota** de la curva y a la rama correspondiente se la llama **rama asintótica**. Vamos a estudiar con detalle los tipos de ramas infinitas.

Ramas infinitas en $x = c$. Asíntotas verticales

Las únicas ramas infinitas que pueden darse en valores concretos de la abscisa, $x = c$, son las ramas asintóticas verticales.

Para averiguar si el límite es $+\infty$ o $-\infty$, calcularemos el valor de $f(x)$ en puntos próximos a c (con ayuda de la calculadora).

En una función hay asíntota vertical en $x = c$ si $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.

Si $f(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional simplificada (cociente de dos polinomios sin raíces comunes), sus asíntotas verticales se encuentran en los valores de x que son raíces del denominador. Se hallan resolviendo la ecuación $Q(x) = 0$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar las asíntotas verticales de las funciones siguientes:*

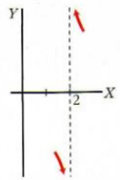
a) $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

b) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

Estudiar, en cada caso, la posición de la curva respecto a la asíntota.

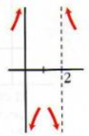
a) $x = 2$ es raíz del denominador y no lo es del numerador. Veamos la posición de la curva respecto a esta asíntota estudiando sus signos en valores próximos a $x = 2$, por la derecha y por la izquierda:

	$x \to 2^-$	$x \to 2^+$
VALOR DE x	1,99	2,01
VALOR DE $f(x)$	$\frac{1{,}01}{-0{,}01} < 0$	$\frac{0{,}99}{0{,}01} > 0$
CONCLUSIÓN	$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$



b) El denominador tiene dos raíces: $x = 0$, $x = 2$

	$x = 0$		$x = 2$	
	$x \to 0^-$	$x \to 0^+$	$x \to 2^-$	$x \to 2^+$
x	–0,01	0,01	1,99	2,01
$f(x)$	$\frac{1{,}0001}{0{,}0201} > 0$	$\frac{1{,}0001}{-0{,}0199} < 0$	$\frac{4{,}9601}{-0{,}0199} < 0$	$\frac{5{,}0401}{0{,}0201} > 0$
CONCLUSIÓN	$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ b) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

2. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ b) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$

Ramas infinitas cuando $x \to +\infty$

Hay varios tipos de ramas infinitas cuando $x \to +\infty$. Veamos las más importantes:

RECUERDA

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \to$ ASÍNTOTA HORIZONTAL

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \begin{cases} \text{ASÍNTOTA OBLICUA} \\ \text{o} \\ \text{RAMA PARABÓLICA} \end{cases}$

Asíntota horizontal. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, entonces la recta $y = l$ es asíntota de la función.

Asíntotas oblicuas. Hay funciones $y = f(x)$ que, cuando $x \to +\infty$, se aproximan mucho a una recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, ciñéndose a ella. Dicha recta es una asíntota oblicua.

Ramas parabólicas. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ y la curva no tiene asíntota oblicua, entonces la curva presenta una rama parabólica. Hay dos tipos:

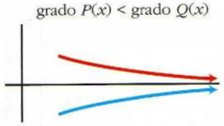
La curva crece, o decrece, cada vez más deprisa. De este tipo son las ramas parabólicas de las funciones **polinómicas** y **exponenciales**.

La curva crece, o decrece, cada vez más despacio. De este tipo son las funciones **radicales** y las **logarítmicas**.

Obtención de ramas infinitas $(x \to +\infty)$ en funciones racionales

Si $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional, para hallar su rama infinita cuando $x \to +\infty$ procederemos del siguiente modo:

grado $P(x)$ < grado $Q(x)$



El eje X es **asíntota horizontal**. La curva se le acerca por arriba o por abajo.

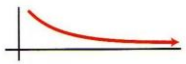
I. grado de $P(x)$ < grado de $Q(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$. La recta $y = 0$ (eje X) es **asíntota horizontal**.

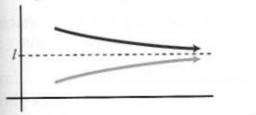
Para hallar la posición de la curva respecto de la asíntota estudiaremos el signo de $P(x)/Q(x)$ para un valor grande de x.

Por ejemplo, en $y = \dfrac{3x - 5}{x^2 + 3x + 2}$, el eje X es asíntota horizontal.

Es evidente que, para valores grandes de x, tanto el numerador como el denominador son positivos. Por tanto, la curva está por encima de la asíntota horizontal.



grado $P(x)$ = grado $Q(x)$



La recta $y = l$ es **asíntota horizontal**.

II. grado de $P(x)$ = grado de $Q(x)$

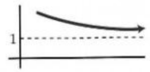
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = l$. La recta $y = l$ es **asíntota horizontal**.

Para hallar la posición de la curva respecto de la asíntota, estudiamos el signo de la diferencia $\dfrac{P(x)}{Q(x)} - l$ para un valor grande de x.

Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = 1$. La recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

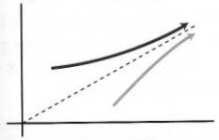
Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - l = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} - 1 = \frac{2x + 1}{x^2 - 2x}$$



Esta diferencia es positiva para x grande. Por tanto, la curva se acerca a la asíntota por arriba.

grado $P(x)$ – grado $Q(x)$ = 1



Hay una **asíntota oblicua**.

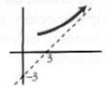
III. grado de $P(x)$ – grado de $Q(x)$ = 1

$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & mx + n \end{array}$ $\quad \dfrac{P(x)}{Q(x)} = mx + n + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$; $\quad y = mx + n + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$

La recta $y = mx + n$ es asíntota (**asíntota oblicua**).

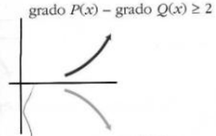
La posición de la curva respecto de la asíntota se averigua estudiando el signo de $R(x)/Q(x)$ para valores grandes de x.

Por ejemplo, $y = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = x - 3 + \dfrac{1}{x - 2}$



La recta $y = x - 3$ es asíntota. Observamos que, para valores grandes de x, $1/(x - 2)$ es positivo. Por tanto, la curva queda por encima de la asíntota.

grado $P(x)$ – grado $Q(x)$ ≥ 2



Hay una **rama parabólica**.

IV. grado de $P(x)$ – grado de $Q(x) \geq 2$

En este caso hay una **rama parabólica**, hacia arriba o hacia abajo según que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sea $+\infty$ o $-\infty$.

Por ejemplo, $y = \dfrac{x^3 - 5x^2}{-x + 3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 5x^2}{-x + 3} = -\infty$

Tiene una rama parabólica hacia abajo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Halla las ramas infinitas, $x \to +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a su asíntota:

a) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ b) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

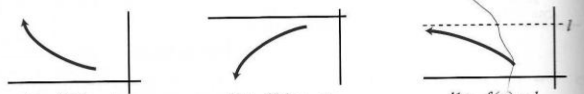
4. Halla las ramas infinitas, $x \to +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a sus asíntotas, si las hay:

a) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ b) $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x}$

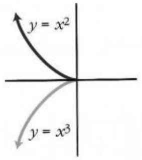
11.7 COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to -\infty$

Se dice que $x \to -\infty$ cuando los valores que toma se alejan hacia la parte negativa del eje de las X. Por ejemplo, –10, –1 000, –10 000, …

Las definiciones, razonamientos y procedimientos sobre los límites cuando $x \to -\infty$ son similares a los que se han hecho para límites cuando $x \to +\infty$. Vamos a resumir los fundamentales.



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$



$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Para el cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales, basta razonar sobre las potencias de números negativos:

Si n es par, $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$, y si n es impar, $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.

Teniendo esto en cuenta y manejando correctamente la regla de los signos, los procedimientos para el cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales son idénticos a los ya vistos para el caso de $x \to +\infty$. Otro tanto ocurre con las asíntotas y demás ramas infinitas.

- En general, todos los límites cuando $x \to -\infty$ se resuelven de forma similar a los $x \to +\infty$, teniendo en cuenta la regla de los signos.
- La obtención de las asíntotas horizontales y oblicuas para $x \to -\infty$, y la posición de la curva respecto a ellas, es similar a lo ya visto.
- Si la función es cociente de dos polinomios y tiene asíntota horizontal u oblicua para $x \to +\infty$, tiene la misma asíntota para $x \to -\infty$.

TEN EN CUENTA

Una vez obtenidas todas las ramas infinitas ($x \to -\infty$, verticales y $x \to +\infty$), nos encontramos con la sorprendente y agradable peculiaridad de las funciones racionales de que, con solo esta información, casi siempre podremos conocer la forma de la curva con notable claridad.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar los límites cuando $x \to -\infty$ de:*

a) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7$

b) $f(x) = \dfrac{3}{-5x^2 + 7x + 2}$

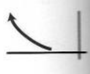
c) $f(x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 7}{x^2 - 2x + 3}$

d) $f(x) = \dfrac{7x^3 + 2x^2 - 1}{-2x^3 + 11}$

a) $\lim_{x\to-\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7) = \lim_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3}{-5x^2 + 7x + 2} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{3}{-5x^2} = 0$, tomando valores negativos.

c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 7}{x^2 - 2x + 3} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$



d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{7x^3 + 2x^2 - 1}{-2x^3 + 11} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{7x^3}{-2x^3} = \dfrac{7}{-2} = -\dfrac{7}{2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y representa la rama correspondiente: $f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$

2. Halla $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y traza las ramas correspondientes:

a) $f(x) = (x^2 + 3)/(-x^3)$ $\qquad$ b) $f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$

EJERCICIOS RESUELTOS

2. *Hallar la rama infinita correspondiente a $x \to -\infty$ para las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2}{-x + 3}$

a) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

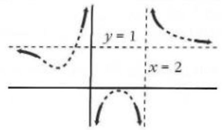
Obtenemos la misma asíntota horizontal, $y = 1$, que obtuvimos para $x \to +\infty$ (véase página 287). La posición de la curva respecto de la asíntota se averigua de forma similar para valores "muy negativos" de x:

Para $x = -1\,000$:

$$f(-1\,000) - 1 = \frac{(-1\,000)^2 + 1}{(-1\,000)^2 - 2 \cdot (-1\,000)} - 1 = -0{,}00199 < 0$$

La curva se acerca a la asíntota por debajo.

Si completamos esta información con la que ya poseíamos (páginas 285 y 287), se puede insinuar la forma final de la curva.



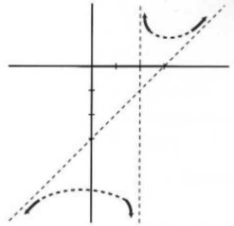
b) Como *grado del numerador = grado del denominador + 1* tiene asíntota oblicua, la misma que obtuvimos en la página 287:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$$

La diferencia entre curva y asíntota, $\dfrac{1}{x - 2}$, es negativa cuando $x \to -\infty$.

Por tanto, la curva se aproxima a la asíntota por debajo.

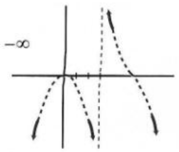
Si unimos esta información a la que ya obtuvimos en las páginas 285 y 287, se puede insinuar la forma de la curva.



c) Puesto que el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador, hay ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{-x + 3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-x} = \lim_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$$

Si añadimos a esta rama parabólica las demás ramas infinitas, podemos adivinar la forma de la curva.



EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Halla las ramas infinitas, $x \to -\infty$, de estas funciones, *y sitúa la curva respecto a las asíntotas:*

a) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ $\qquad$ b) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ $\qquad$ d) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

4. Halla las ramas infinitas, cuando $x \to -\infty$, y si tienen asíntotas, *sitúa la curva respecto a ellas:*

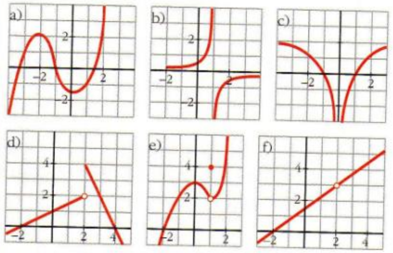
a) $y = \dfrac{x^4}{x^2 + 1}$ $\qquad$ b) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

c) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ $\qquad$ d) $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x}$

PARA PRACTICAR

1 a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?

b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



2 Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$ b) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$ d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$ f) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

3 Comprueba si las siguientes funciones son continuas en $x = 0$ y en $x = -2$:

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ d) $y = \sqrt{7 - 2x}$

4 Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:

a) $y = 5 - \dfrac{x}{2}$ b) $y = \sqrt{x - 3}$

c) $y = \sqrt{-3x}$ d) $y = \sqrt{5 - 2x}$

5 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(5 - \dfrac{x}{2}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-x}{x-2}$ d) $\lim\limits_{x \to 0,5} 2^x$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{10 + x - x^2}$ f) $\lim\limits_{x \to 4} \log_2 x$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$ h) $\lim\limits_{x \to 2} e^x$

6 Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa el resultado que obtengas.

a) $f(x) = x^3 - 10x$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{3-x}{2}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{-3}$

☛ *Dale a x "valores grandes" y saca conclusiones.*

7 Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.

8 Comprueba, dando valores grandes a x, que las siguientes funciones tienden a 0 cuando $x \to +\infty$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10}$ b) $f(x) = \dfrac{100}{3x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{-7}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \dfrac{2}{10x^2 - x^3}$

Representa gráficamente su posición sobre el eje OX o bajo el eje OX.

9 Calcula los siguientes límites y representa la información que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + x - x^3)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{x^4}{3} + \dfrac{x}{2} - 17\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - x)^2$

10 Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.

11 Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2 - 1}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 5}{1-x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3}$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x}$

12 Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$.

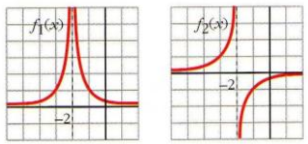
13 Dada la función $y = \dfrac{2x}{1-x}$, halla:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x}{1-x}$ b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x}{1-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{1-x}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{1-x}$

Representa gráficamente los resultados obtenidos.

14



Estas son, respectivamente, las gráficas de las funciones:

$f_1(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$ y $f_2(x) = \dfrac{-1}{x+2}$

¿Cuál es el límite de cada una de estas funciones cuando $x \to -2$?

☛ *Observa la función cuando $x \to -2$ por la izquierda y por la derecha.*

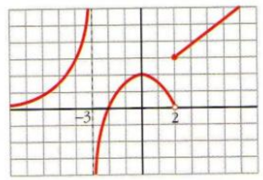
15 Sobre la gráfica de la función $f(x)$, halla:

a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

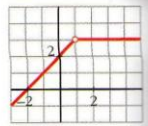
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ h) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$



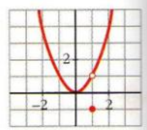
16 Comprueba que las gráficas de estas funciones corresponden a la expresión analítica y di si son continuas o discontinuas en $x = 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ne 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



17 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$, halla:

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

☛ *Para que exista límite en el punto de ruptura, tienen que ser iguales los límites laterales.*

18 Comprueba si la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

es continua en $x = 0$.

☛ *Recuerda que para que f sea continua en $x = 0$, debe verificarse que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.*