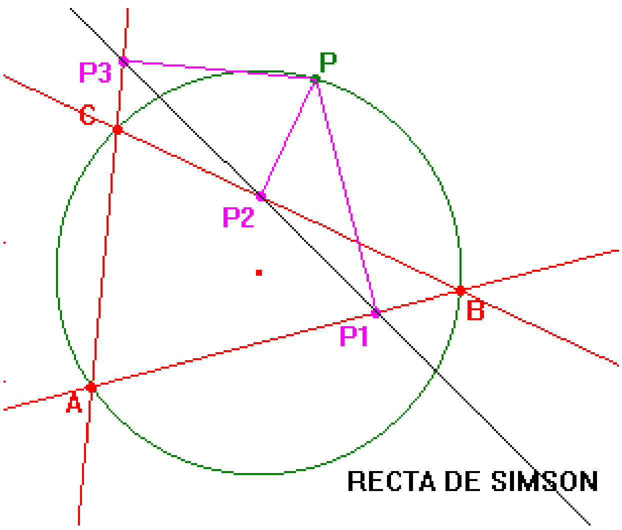
## Recta de Simson

- Si consideramos un triángulo y su circunferencia circunscrita. Los tres puntos obtenidos al proyectar un punto P cualquiera de la circunferencia sobre las rectas que contienen a los lados del triángulo, están alineados (es decir, son colineales, están sobre una misma recta). La recta que contiene a estos tres puntos se conoce con el nombre de recta de Simson.

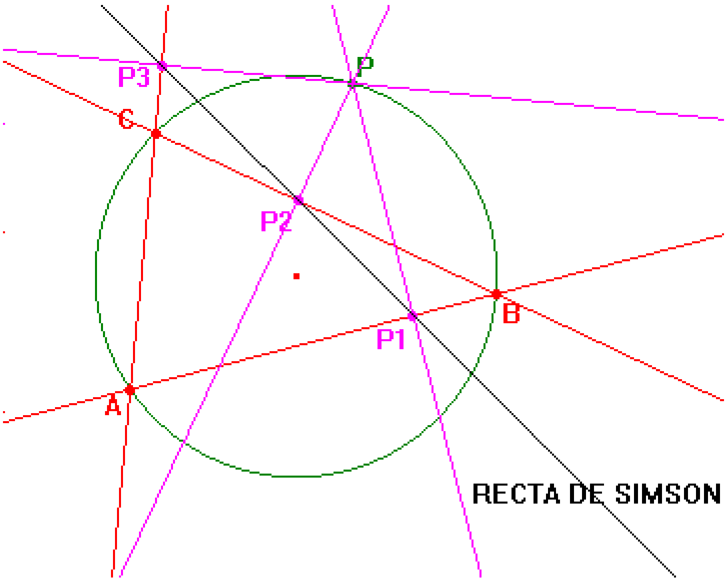
- Dicho de otra manera, la recta de Simson es la recta que contiene a los tres puntos obtenidos al proyectar un punto cualquiera de una circunferencia circunscrita a un triángulo sobre las rectas que contienen a los lados del triángulo. (Para proyectar un punto cualquiera de dicha circunferencia sobre las rectas que contienen a los lados del triángulo, se trazan rectas perpendiculares desde ese punto a las rectas que contienen los lados del triángulo)

**DIBUJO DE LA RECTA DE SIMSON**



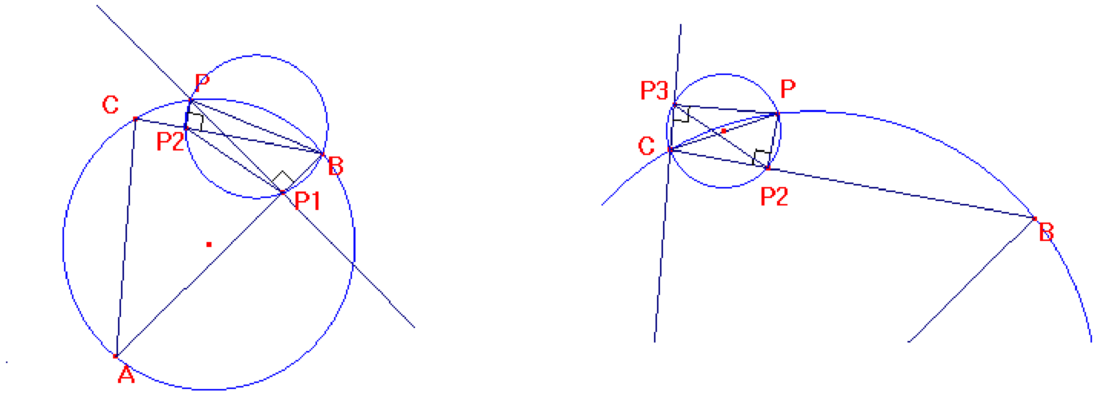
**CONSTRUCCIÓN**

- Construya una circunferencia.
- Marque tres puntos A, B, C sobre la circunferencia.
- Trace el triángulo ABC.
- Marque un punto P sobre la circunferencia.
- Trace las rectas que contienen a cada uno de los lados del triángulo.
- Desde el punto P trace las rectas perpendiculares a las rectas que contienen los lados del triángulo.
- Marque con un punto cada una de las tres intersecciones (pies de las perpendiculares) $P_1$, $P_2$, $P_3$.
- Trace la recta que contiene a estos tres puntos ($P_1$, $P_2$, $P_3$). Esta recta es la recta de Simson.



**DEMOSTRACIÓN**

Consideremos el triángulo ABC y un punto P sobre su circunferencia circunscrita. Los puntos $P_1$, $P_2$, $P_3$ son las proyecciones de P sobre las rectas que contienen a los lados del triángulo.

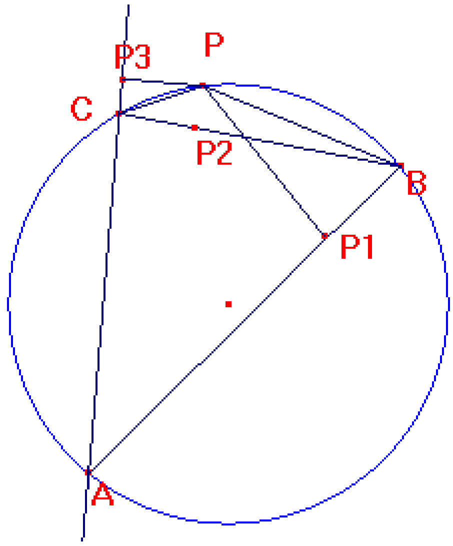



- Si nos fijamos en las proyecciones $P_1$ y $P_2$:

  Como el segmento PB es la hipotenusa del triángulo $P_2BP$ y del triángulo $P_2P_1B$, entonces ambos triángulos rectángulos tienen circunscrita una circunferencia cuyo diámetro es el segmento PB.
  Como los ángulos $<P_1P_2B$ y $<P_1PB$ subtienden el mismo arco de circunferencia, entonces ambos ángulos son iguales. (Nota: Se utilizó el símbolo < para denotar ángulo)

- De la misma forma, si ahora nos fijamos en las proyecciones $P_2$ y $P_3$:
  El segmento CP es la hipotenusa del triángulo $CPP_3$ y del triángulo $CP_2P$, entonces ambos triángulos rectángulos tienen circunscrita una circunferencia, cuyo diámetro es el segmento CP.
  Como los ángulos $<CP_2P_3$ y $<CPP_3$ subtienden el mismo arco de circunferencia, entonces ambos ángulos son iguales.

- Por último demostraremos que los ángulos $<P_1P_2B$ y $<CP_2P_3$ son iguales, siendo estos ángulos opuestos por el vértice al cortarse la recta de Simson y el lado CB; por lo que los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$ están alineados. Para demostrar la igualdad de esos dos ángulos basta demostrar la de sus equivalentes $<P_1PB$ y $<CPP_3$.




El ángulo $<P_3PP_1$ es suplementario de $<CAB$, ya que el cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia (esto es porque está formado por dos triángulos rectángulos de hipotenusa común, triángulo rectángulo $APP_3$ y triángulo rectángulo $AP_1P$).

El ángulo $<CPB$ también es suplementario de $<CAB$, ya que el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia. Restando a ambos ángulos ($<P_3PP_1$ y $<CPB$) el ángulo $<CPP_1$ se obtiene que los ángulos $<P_1PB$ y $<CPP_3$ son iguales.

Por lo tanto los ángulos $<P_1P_2PB$ y $<CP_2P_3$ son iguales (son ángulos opuestos por el vértice). Entonces los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$ están alineados.