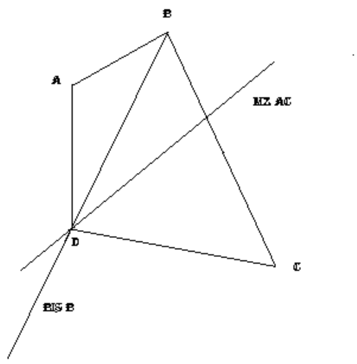
Cíclicos

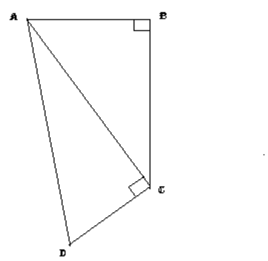
CUADRILÁTEROS:

- **condiciones suficientes:**

1. Si mz AC ∩ bis b = D
   → A,B,C,D son cíclicos

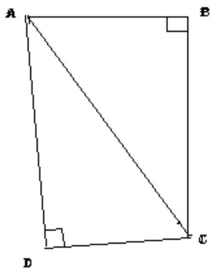


2. Si ABD = 90º y ADC = 90º es suficiente para demostrar que ABCD es cíclico pero no es necesaria porque hay cuadriláteros que son cíclicos pero no cumplen esta propiedad.



Por L.G. de Thales AD es diámetro (Φ) de una cfa. Que pasa por B y por C.

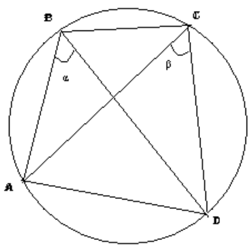
3. Si ABC = 90º y ADC = 90º es suficiente para asegurar que ABCD es cíclico pero no es necesaria.



Por L.G. de Thales AD es Φ de una cfa. Que pasa por B y por C.

- **Condiciones necesarias y suficientes:**

1. Si ABD = ACD es condición necesaria y suficiente para que el cuadrilátero sea cíclico. Es OBVIO por la definición de Arco Capaz

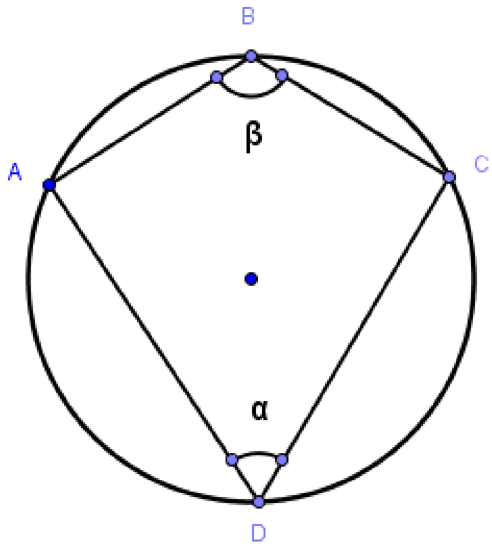


Directo → Si β = α entonces existe el A.C (AD, α) que contiene a B y C → ABCD es cíclico

Recíproco → Si ABCD es cíclico existe una cfa que pasa por los 4 puntos →
ABD = ½ AOD
ACD = ½ AOD

→ α = β

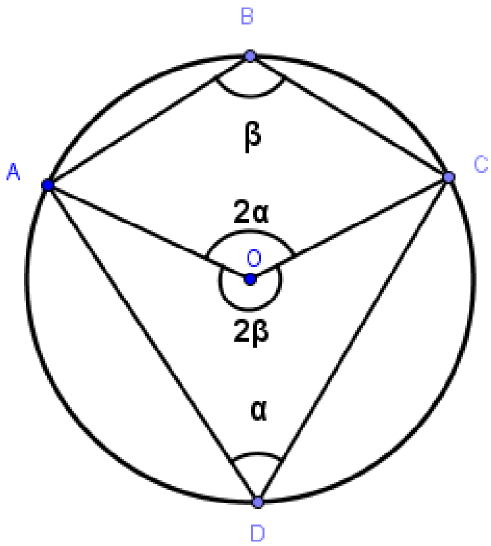
2. No OBVIA pero clásica: es condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea inscriptible que la suma de sus ángulos opuestos sea 180º.



$$\alpha + \beta = 180º$$

- **Necesaria**:

    - Hipótesis: El cuadrilátero ABCD es cíclico.
    - Tesis: <B + < D = 180º
    - Demostración:

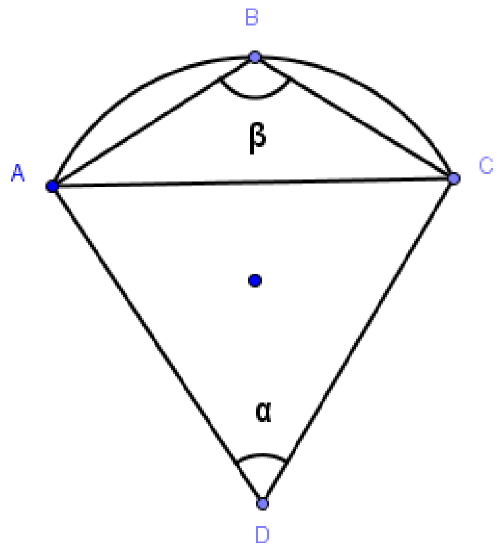


➔ Por Teorema del ángulo inscripto: <AOC = 2 α
➔ Por Teorema del ángulo inscripto: <AOC (cóncavo) = 2 β

$$2\alpha + 2\beta = 360º$$
$$\boxed{\alpha + \beta = 180º}$$

- **<u>Suficiente:</u>**

  - <u>Hipótesis</u>: <B + <D = 180º
  - <u>Tesis</u>: El cuadrilátero ABCD es cíclico
  - <u>Demostración</u>:



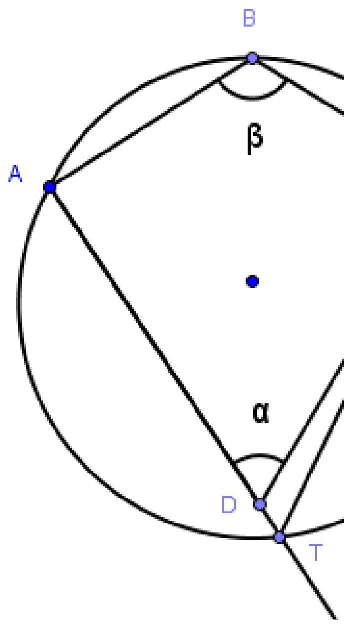
i) Por hipótesis α = β
ii) Trazo recta AC.
iii) Por existencia de circuncentro en el triángulo ABC, dibujo la circunferencia que sea circunscripta al triángulo ABC.

<u>Se pueden dar tres casos:</u>

i. Que D pertenezca a la circunferencia
ii. Que D pertenezca al círculo
iii. Que D no pertenezca ni a la circunferencia ni al círculo

Para demostrar que el único caso que se cumple es el primero, vamos a demostrar que no se cumple ni el segundo ni el tercero.

ii. Supongamos que D pertenece al círculo:



i) Prolongo la semirrecta AD hasta cortar a la circunferencia. A ese punto lo llamo T.

ii) Formo el cuadrilátero ABCT que por construcción es cíclico

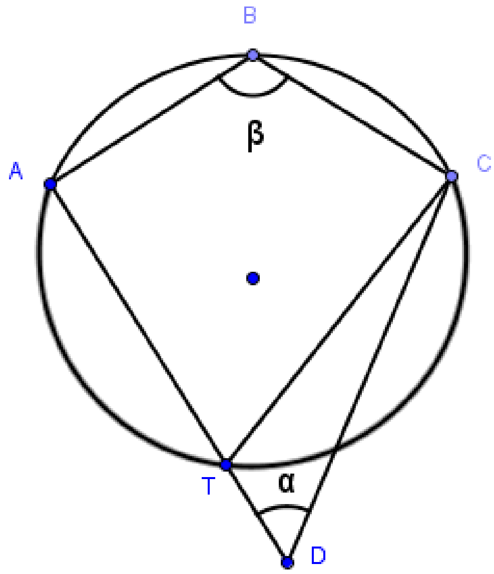
➔ $<ATC + \beta = 180º$ por construcción necesaria.

iii) Por hipótesis $\alpha + \beta = 180º$ ➔ $<ATC = \alpha$

iv) Como la recta DC y la recta TC no son paralelas es imposible que el ángulo ATC sea igual a α.

Por lo tanto demostré que es imposible que el segundo caso suceda.

iii. Supongamos que D no pertenece ni al círculo ni a la circunferencia.

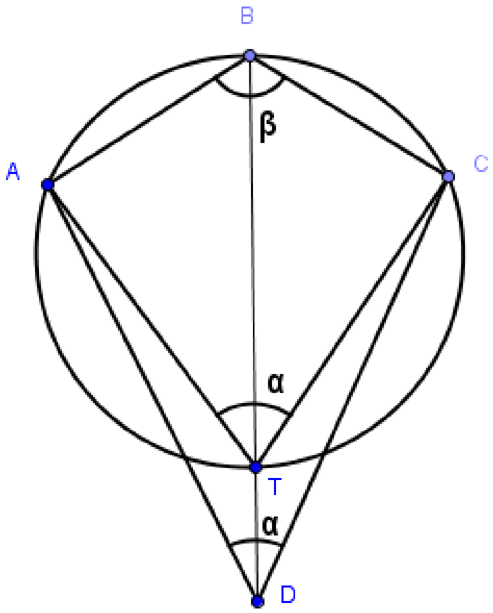


i) El segmento AD o el CD corta la circunferencia. Llamo T a ese punto.

ii) Formo el cuadrilátero ABCT que es cíclico por construcción ➔ <ATC = α
(ídem caso anterior)

iii) Es imposible porque la recta TC no es paralela a las recta DC.

<u>Otra demostración:</u>



- <u>Hipótesis</u>: <ABC = <ADC.

  i) La recta BD corta con la circunferencia = T
  ii) Por teorema anterior <ATC = α ➔ ADC ≠ α

<ATB es mayor que <ADB
<u><CTB es mayor que <CDB</u>
α es mayor que α ➔ absurdo

Demostré que es imposible que suceda el tercer caso. Por lo tanto, el único caso que se cumple es el primero. D tiene que pertenecer a la circunferencia siempre que su ángulo mas el ángulo en B sume 180º.

<u>Polígonos de más de 4 vértices cíclico</u>

Para que un polígono de más de 4 vértices sea cíclico, todo cuadrilátero formado por los vértices del polígono debe ser cíclico.

Para demostrar que el pentágono ABCDE es cíclico tomo 2 cuadriláteros con 3 vértices en común.

<u>Ejemplo</u>:

Si demuestro que ABCD y que ABCE son cíclicos, entonces se que ABCDE es cíclico.