FUNCIONES POLINÓMICAS DE TERCER GRADO

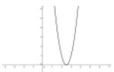
(1) Determina el signo de cada una de las siguientes funciones y asocia qué gráfico corresponde a cada una de ellas:

$f: f(x) = 3x + 5;\ g: g(x) = -x + 4;\ h: h(x) = -2x^2 - x + 3;\ i: i(x) = 2x^2 + 3x + 6;\ j: j(x) = 4x^2 - 20x + 25$

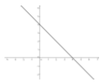
$k: k(x) = (x+3)(-x^2 + 4x - 3);\ l: l(x) = x^3;\ m: m(x) = (x-5)(x^2 + 2x + 4);\ n: n(x) = (2x+1)(-12x^2 - 6x - 2);$

$o: o(x) = (x-3)(-x^2 - x + 12)$

(1)

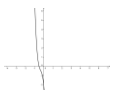


(2)



(3)

(4)

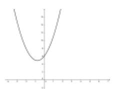


(5)

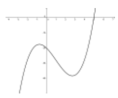
(6)

(7)

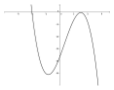
(8)



(9)



(10)



FUNCIONES POLINÓMICAS DE TERCER GRADO

$f: R \to R \ / \ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$ es una función polinómica de tercer grado.

Una función polinómica de tercer grado se puede expresar como el producto de una función de segundo grado por otra de primer grado. A partir de esto, vamos a analizar el número de raíces reales que puede admitir una función polinómica de tercer grado.

Sea $f(x) = (mx^2 + nx + p)\,(qx + r)$ $\quad m \neq 0, \quad q \neq 0$

Para hallar las raíces planteamos la ecuación: $(m\,x^2 + n\,x + p)\,(q\,x + r) = 0$

Por propiedad hankeliana : $m\,x^2 + n\,x + p = 0$ o $q\,x + r = 0$

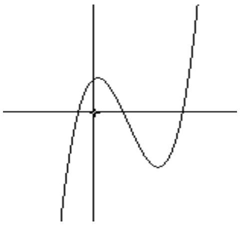
$m\,x^2 + n\,x + p = 0$ puede $\begin{cases} \text{tener 2 raíces reales distintas} \\ \text{tener 2 raíces reales iguales} \\ \text{o no tener raíces reales} \end{cases}$

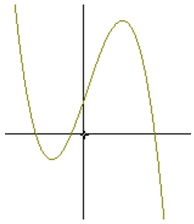
y

$q\,x + r = 0$ tiene una raíz real.

Entonces f puede admitir:

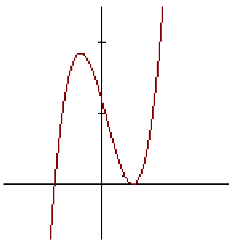
3 raíces reales distintas
($3RR \neq$)

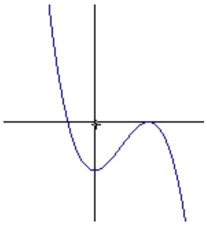




o

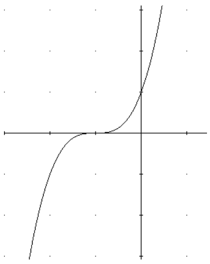
dos raíces reales iguales y una distinta .

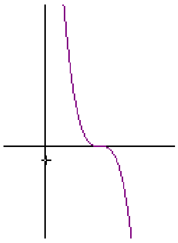




o

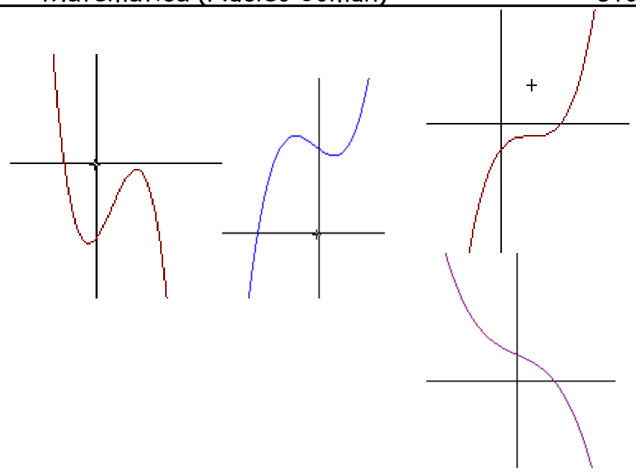
tres raíces reales iguales
($3RR =$)





o

una sola raíz real (1 RR) y dos raíces no reales.



Observación

> Toda función polinómica de tercer grado tiene por lo menos una raíz real

RAÍCES DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA DE TERCER GRADO

Si queremos determinar las raíces de una función polinómica de tercer grado alcanzaría con expresarla como el producto de una de primer grado por otra de segundo grado.
Para lograr esto vamos a necesitar trabajar con la división entera de funciones polinómicas.

División entera

$4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \quad | \underline{\; x-2 \;}$

$\underline{-4x^3 + 8x^2} \qquad\qquad 4x^2 + 13x + 23$

$/ \; +13x^2 - 3x + 1$

$\underline{\;\; -13x^2 + 26x \;\;}$

$/ \quad + 23x + 1$

$\underline{\quad -23x + 46}$

$/ \quad + 47$

$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ (dividendo)
$g(x) = x-2$ (divisor)
$q(x) = 4x^2 + 3x + 23$ (cociente)
$r(x) = 47$ (resto)

¿qué relación existe entre estas cuatro expresiones?

También podemos hacer la división usando este esquema (esquema de Ruffini)

	4	5	-3	1
2		8	26	46
	4	13	23	47

Raíz del

Coeficientes del cociente

resto

El esquema de Ruffini se utiliza para realizar divisiones de una función polinómica f, entre otra g tal que $g(x) = x - b \ , b \in R$

(2) Utilizando el esquema de Ruffini, halla cociente y resto de dividir p(x) entre g(x) para los siguientes casos:

a) $p(x) = 7x^3+6x^2-10x-3$ $\quad g(x) = x-1$

b) $p(x) = 2x^3 - x^2+ 5x - 6$ $\quad g(x) = x+3$

c) $p(x) = 4x^3 + 3x -1$ $\quad g(x) = x - 1/2$

d) $p(x)= - 4x^3+3x -1$ $\quad g(x) = x$

(3) Completa el siguiente esquema y determina dividendo, divisor, cociente y resto.

	4	-2		-7
		10	31	

(4) Del esquema de Ruffini utilizado para hallar el cociente y el resto de dividir f(x) entre (x – a) sabemos lo siguiente:

			3	1
		-8		10
			- 5	

Determina el valor de a, f(x) , y el cociente de la división.

(5) Sea $p : p(x)= - ax^3 + x^2 + 1$, halla a sabiendo que el resto que resulta de dividir p entre $d : d(x) = x-2$ es -3.

Una observación importante:

Sea f: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx +d, \quad a \neq 0$

Si efectuamos la división $\begin{array}{l|l} f(x) & x-\beta \\ \hline r & q(x) \end{array}$ $\Rightarrow$ $f(x) = (x - \beta)\, q(x) + r$ (*)

Sustituyendo x por β en (*) se obtiene: $f(\beta) = (\beta - \beta).\, q(\beta) + r \Rightarrow f(\beta) = r$

Si además β es raíz de f $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(\beta) = 0 \\ f(\beta) = r \end{array}\right\} \Rightarrow r = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} f(x) & x-\beta \\ \hline r & q(x) \end{array} \Leftrightarrow f(\beta) = r}$$

$\begin{array}{l|l} f(x) & x-\beta \\ \hline 0 & q(x) \end{array} \Leftrightarrow f(\beta) = 0$

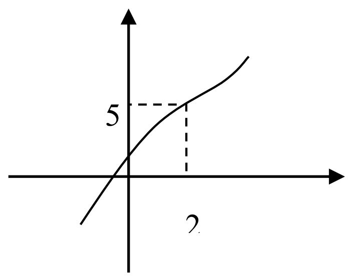
o sea

f es divisible entre $x - \beta \Leftrightarrow$ es raíz de f

(6) Sea f una función polinómica tal que $f(1) = 5$, $f(-1) = 3$, $f(4) = 0$ y $f(0) = 1$

a) Halla el resto de dividir f entre $g(x) = x + 1$
b) ¿ Es f divisible entre $h(x) = x - 4$?
c) ¿ Es f divisible entre $k(x) = x - 1$?

(7) Sea f una función polinómica de la que se ha dibujado parte del gráfico.
¿Cuál es el resto de dividir f entre $g(x) = x - 2$?



(8)
a) Verifica que 3 es raíz de $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
b) Efectúa la división de f entre h / $h(x) = x - 3$ y verifica que su resto es 0.
c) Escribe dividendo, divisor, cociente y resto y la relación entre ellos.
d) A partir de lo anterior, halla las otras dos raíces de f .

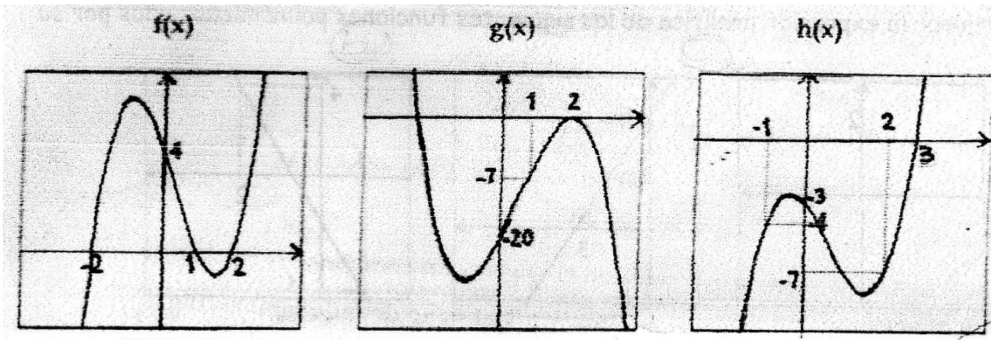
Sea f una función polinómica de tercer grado

Si α, β y γ son raíces de f $\Rightarrow$ $\begin{array}{l|l} f(x) & x-\alpha \\ \hline 0 & q(x) \end{array}$ y β y γ son raíces de q.

(9) Sea f: $f(x) = 36x^3 - 12x^2 - 5x + 1$, determina todas las raíces de f, sabiendo que una de ellas es $\frac{1}{6}$.

(10) Sea f: $f(x) = 3x^3 - x^2 + mx + 4$ i) Determina m, sabiendo que f es divisible entre (x-2)
ii) Determina todas las raíces de f.
iii) Estudia el signo de f
iv) Resuelve en R : $f(x) < 0$

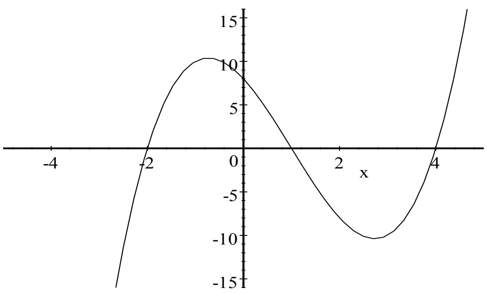
(11) (a) Determina la expresión analítica de cada una de las funciones polinómicas de tercer grado dadas por sus gráficos:



(b) Resuelve: $f(x) > 0$ $\quad g(x) > 0$ $\quad h(x) \leq 0$

(12) Dado p(x) = $3x^4 - 2x^3 + 5x + b$; halla **b** sabiendo que el resto de dividir p entre x - 2 es igual a -15.

(13) La figura muestra la gráfica de una función $g: R \to R$



(a) Completa: g(1) =.....; g(-2) =........; g(0) = ...

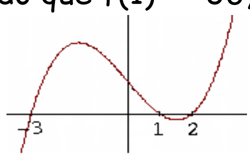
¿Cuántas pre-imágenes tiene 2? ¿Cuáles son, aproximadamente?

b) ¿Cuáles son las raíces de g?

c) Estudia el signo de g y expresa por extensión:
H = $\{ x / x \in N \wedge g(x) \leq 0 \}$

d) Indica V o F: $g(-8) < 0$; $g(-4) > 0$; $g(-2) < 0$; $g(1) > g(3)$

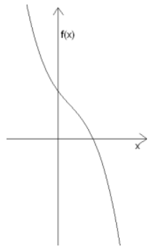
(14) Sea una función polinómica f: f(x) = $2x^3 + ax^2 + bx + c$. Halla a, b y c sabiendo que f(1) = –36, f dividido por x tiene resto –12, y –3 es raíz de f.
Para los valores hallados, determina las raíces de f.



(15) El gráfico corresponde a una función f, polinómica de tercer grado.

(i) Sin calcular, indica signo de f(-5/2) y f(3/2)

(ii) Resuelve $f(x) \leq 0$

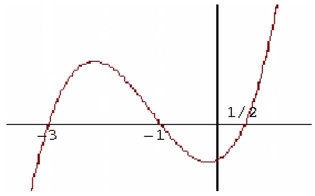


(16) Si éste es el gráfico de una función polinómica f de tercer grado, ¿Cuál o cuáles de estas expresiones puede corresponder a f?

(a) $(3x^2 + 5)(x - 1)$

(b) $(3x^2 + 5)(-x + 1)$

(c) $(3x^2 - 5)(x - 1)$



(17) El gráfico corresponde a una función polinómica f de tercer grado.

(a) Indica el signo de f

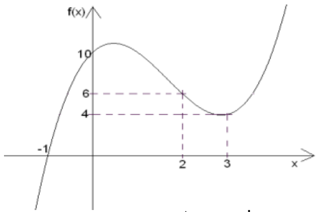
(b) Indica el signo del coeficiente principal.

(c) Determina f sabiendo además que f(1) = 8

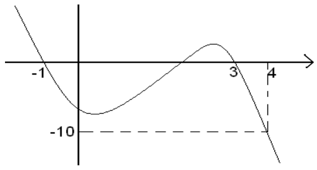
(18)

(a) Determina f de tercer grado cuyo gráfico se adjunta:

(b) Resuelve en R, f(x) > 0.



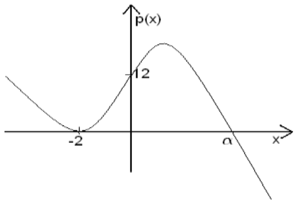
(19) Determina una función polinómica f de tercer grado, cuya gráfica se adjunta y además cumple que f(-3) = 60



(20)

(a) Determina una función polinómica p sabiendo que es de tercer grado y que <u>una</u> de las siguientes afirmaciones es cierta: p(1) = 18 ; p(−3) = – 6

b) Halla todas las raíces de h, polinómica, tal que h(x) = $x^3 + x^2 - 14x - 24$, si admite una raíz común con p.



(21) Sea una función polinómica f:f(x) = $(mx + p)(x^2 - 5x + 6)$, cuyo gráfico se adjunta.
¿Es verdadero o falso?:

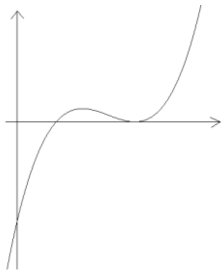
(a) m = –2

(b) m = 2

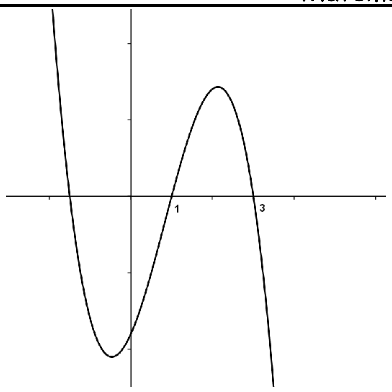
(c) m puede ser 2

(d) p puede ser positivo

(e) p = – 3m



(22) Sea f una función polinómica de tercer grado cuyo gráfico es:



(a) Halla f(x) si se sabe que: f(x) dividido x da resto -18 y una de las siguientes afirmaciones es verdadera y la otra falsa: f(-1)=-16 o f(2)=-14.

(b) Resuelve: (i) $f(x) > 0$

(ii) $\dfrac{f(x)}{x^2 - x} \leq 0$

(23) Sea $f(x) = -2x^3 + (k-3)x^2 + (3k+5)x - 2$

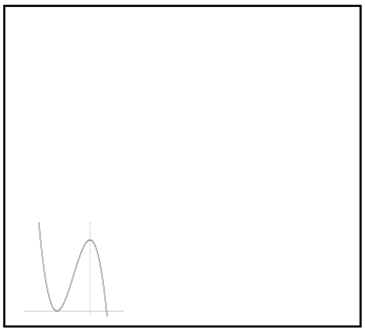
(a) Halla k para que -2 sea raíz de f

(b) Para k hallado resuelve: $\dfrac{x^2 + 2x}{f(x)} \geq 0$

(24) Sea f :$f(x) = (x+4)(-2x^2+ax+b)$

a) Halla en función de a y b: f(1) y f(-1).

b) Halla a y b sabiendo que: f(1)-f(-1) = -4 y que el gráfico de f es:



c) Resuelve:

i) $f(x) > 0$

ii) $\dfrac{f(x)}{x^2 + 4x} \leq 0$